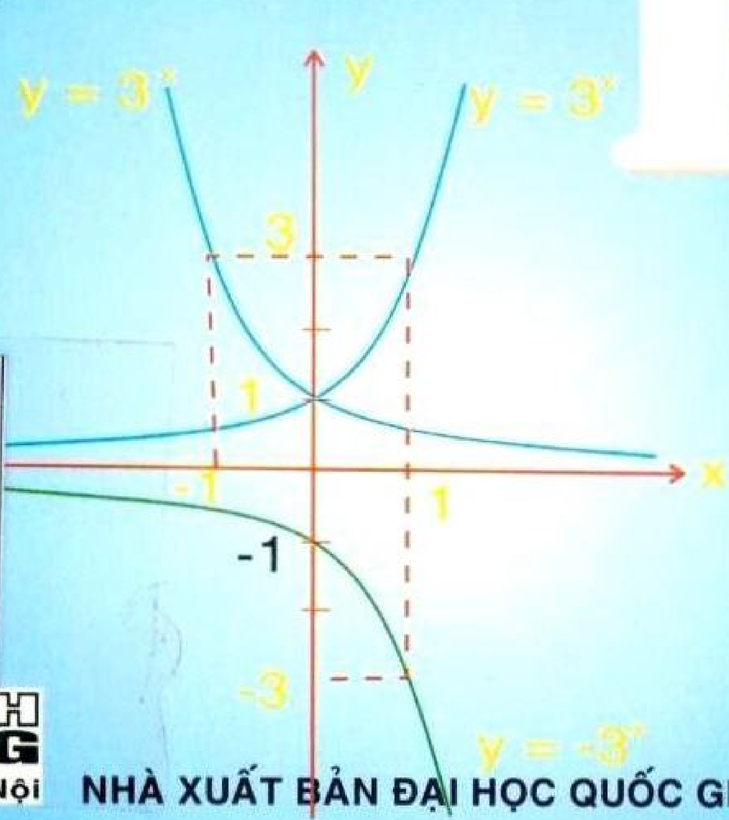
LÊ BÍCH NGỌC *(chủ biên)*
LÊ HỒNG ĐỨC

HỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN

Đại số & Giải tích

(Dùng cho học sinh ban A và luyện thi đại học)

11



TT TT-TV * ĐHQGHN
512
LE-N
2005
LC/01477

Hà Nội
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LÊ BÍCH NGỌC (Chủ biên)
LÊ HỒNG ĐỨC

Học và ôn tập toán
ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

GIỚI THIỆU CHUNG

Xin trân trọng giới thiệu tới bạn đọc bộ sách:

HỌC VÀ ÔN TẬP
TOÁN

do nhóm Cự Môn dưới sự phụ trách của Thạc sĩ Toán học – Kĩ sư Tin học Lê Hồng Đức biên soạn.

Bộ sách gồm 8 cuốn:

Cuốn 1: Học và ôn tập Toán - Hình học 10
Cuốn 2: Học và ôn tập Toán - Đại số 10
Cuốn 3: Học và ôn tập Toán - Lượng giác 11
Cuốn 4: Học và ôn tập Toán - Hình học 11
Cuốn 5: Học và ôn tập Toán - Đại số và Giải tích 11
Cuốn 6: Học và ôn tập Toán - Hình học 12
Cuốn 7: Học và ôn tập Toán - Giải tích 12
Cuốn 8: Học và ôn tập Toán - Đại số tổ hợp 12

Mục tiêu của bộ sách này là cung cấp cho các thầy, cô giáo một bộ bài giảng chuyên sâu có chất lượng và cho các em học sinh Trung học phổ thông yêu thích môn Toán một bộ sách học tập bổ ích.

Bộ sách được viết trên một tư tưởng hoàn toàn mới mẻ, có tính sư phạm, có tính tổng hợp cao, tận dụng được đầy đủ thế mạnh của các phương pháp đặc biệt để giải Toán.

Bộ sách này chắc chắn phù hợp với nhiều đối tượng bạn đọc từ các thầy, cô giáo đến các em Học sinh lớp 10, 11, 12 và các em chuẩn bị dự thi môn Toán Tốt nghiệp PTTH hoặc vào các Trường Đại học.

Cuốn

HỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN
ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11

do Lê Bích Ngọc chủ biên được chia thành 6 chương:

Chương I: Dãy số
Chương II: Giới hạn của hàm số
Chương III: Hàm số liên tục
Chương IV: Hàm số mũ – Hàm số logarit
Chương V: Phương trình, bất phương trình và hệ mũ
Chương VI: Phương trình, bất phương trình và hệ lôgarit

bao gồm 16 chủ đề, miêu tả chi tiết phương pháp giải cho 93 dạng toán cơ bản và nâng cao của Đại số và Giải tích 11.

Cuối cùng, cho dù đã rất cố gắng, nhưng thật khó tránh khỏi những thiếu sót bởi những hiểu biết và kinh nghiệm còn hạn chế, rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa. Mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ tới:

Nhóm Cự Môn
Số nhà 20 - Ngõ 86 - Đường Tô Ngọc Vân - Quận Tây Hồ -Hà Nội

Hà nội, ngày 2 tháng 9 năm 2005
NHÓM CỰ MÔN

CHƯƠNG I

DÃY SỐ – CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

CHỦ ĐỀ 1

DÃY SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa: *Dãy số (u_n) là một ánh xạ từ N^* vào R:*

$$f : N^* \to R$$

Khi đó, ta có $u_n = f(n)$.

Kí hiệu (u_n) hay ở dạng khai triển là $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$

2. CÁCH XÁC ĐỊNH MỘT DÃY SỐ

Một dãy số thường được xác định bằng một trong các cách:

Cách 1: Dãy số xác định bởi một công thức cho số hạng tổng quát u_n.

Thí dụ 1: Dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = 8n + 1$. Khi đó, nếu viết dãy số này dưới dạng khai triển, ta được 9, 17, 25, ..., 8n + 1, ...

Cách 2: Dãy số xác định bởi một công thức truy hồi, tức là:

- Trước tiên, cho số hạng đầu (hoặc vài số hạng đầu).
- Cho công thức biểu thị số hạng thứ n qua số hạng (hay vài số hạng) đứng trước nó.

Thí dụ 2:

a. Dãy số (a_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 2a_{n-1}, \text{ với } n \geq 2 \end{cases}$$

Khi đó, nếu viết dãy số này dưới dạng khai triển, ta được:

$$a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8, a_4 = 16, a_5 = 32, \ldots$$

Dễ thấy rằng, dãy số (a_n) xác định bởi $a_n = 2^n$.

b. Dãy số (b_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} b_1 = b_2 = 1 \\ b_n = b_{n-2} + b_{n-1}, \text{ với } n \geq 3 \end{cases}$$

Khi đó, nếu viết dãy số này dưới dạng khai triển, ta được:

$$b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 2, b_4 = 3, b_5 = 5, \ldots$$

Dãy số này được gọi là *dãy số Phibônaxi*.

Cách 3: Dãy số xác định bởi một mệnh đề mô tả các số hạng liên tiếp của nó.

Thí dụ 3: Cho dãy số (u_n) với u_n là chữ số thứ n trong cách viết thập phân cu số π, khi đó ta có dãy số:

$$u_1 = 3, u_2 = 1, u_3 = 4, u_4 = 1, u_5 = 5, \ldots$$

Trong trường hợp này ta không tìm được công thức biểu thị số hạng u_n qua n.

3. DÃY SỐ ĐƠN DIỆU

Định nghĩa 1 (*Dãy số tăng*): *Dãy số (u_n) được gọi là tăng nếu* $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n < u_{n+1}$.

Vậy, với dãy số (u_n) tăng, ta có $u_1 < u_2 < u_3 < \ldots < u_n < \ldots$

Thí dụ 4:

a. Dãy số (u_n) được xác định bởi $u_n = 2n + 1$ là dãy số tăng.

b. Với dãy số (u_n) được xác định bởi $u_n = n - 6$, dễ thấy nó không phải l dãy số tăng.

Định nghĩa 2 (*Dãy số giảm*): *Dãy số (u_n) được gọi là giảm nếu* $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n > u_{n+1}$.

Vậy, với dãy số (u_n) tăng, ta có $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > \ldots$

Thí dụ 5:

a. Dãy số (u_n) được xác định bởi $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ là dãy số giảm.

b. Với dãy số (u_n) được xác định bởi $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, dễ thấy nó không phải l dãy số tăng hoặc giảm.

4. DÃY SỐ BỊ CHẶN

Định nghĩa 3 (*Dãy số bị chặn trên*): *Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu:*

$$\exists M \in \mathbf{R} : u_n \leq M, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Thí dụ 6:

a. Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ bị chặn trên bởi $\dfrac{1}{2}$. Như vậy, dễ thấy mọi dy số (u_n) giảm luôn bị chặn trên bởi u_1.

b. Với dãy số (u_n) được xác định bởi $u_n = n$, dễ thấy nó không bị chặn trê

Định nghĩa 4 (*Dãy số bị chặn dưới*): *Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu:*

$$\exists m \in \mathbf{R} : u_n \geq m, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Thí dụ 7:

a. Dãy số (u_n) với $u_n = 2n + 1$ bị chặn dưới bởi 3. Như vậy, dễ thấy mọi dãy số (u_n) tăng luôn bị chặn dưới bởi u_1.

b. Với dãy số (u_n) được xác định bởi $u_n = -n$, dễ thấy nó không bị chặn dưới.

Định nghĩa 5 *(Dãy số bị chặn): Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là:*

$$\exists m, M \in \mathbf{R} : m \le u_n \le M, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Thí dụ 8:

a. Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n-1}{n}$, ta có:

- Bị chặn trên bởi 1, vì $u_n = \dfrac{n-1}{n} = 1 - \dfrac{1}{n} < 1, \forall n \in \mathbf{N}^*$.
- Bị chặn dưới bởi 0, vì $u_n = \dfrac{n-1}{n} \ge 0, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

b. Dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n.n$, không bị chặn trên và không bị chặn dưới.

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Mở đầu về dãy số.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Với giả thiết cho dãy số (u_n) dưới dạng công thức tổng quát hoặc biểu thức truy hồi và câu hỏi thường được đặt ra là:

- Hãy viết k số hạng đầu của dãy số hoặc tìm u_k. Câu hỏi này được thực hiện bằng phép thế.
- Xác định xem a là số hạng thứ mấy của dãy số. Câu hỏi này được thực hiện bằng việc giải phương trình ẩn n.

Ví dụ 1: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{(-1)^n + 1}{n}$.

a. Tìm $u_9, u_{12}, u_{2n}, u_{2n+1}$.

b. Tìm xem 0 là số hạng thứ mấy của dãy số ?

Giải

a. Ta có:

$$u_9 = \frac{(-1)^9 + 1}{9} = 0;\quad u_{12} = \frac{(-1)^{12} + 1}{12} = \frac{1}{6}$$

$$u_{2n} = \frac{(-1)^{2n} + 1}{2n} = \frac{1}{n};\quad u_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+1} + 1}{2n+1} = 0.$$

b. Từ kết quả câu a) ta thấy ngay mọi số hạng lẻ của dãy số đều nhận giá trị bằng 0.

Ví dụ 2: Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 15, u_2 = 9 \\ u_n = u_{n-2} - u_{n-1}, n \geq 3 \end{cases}$$

a. Hãy viết 6 số hạng đầu của dãy số.

b. Tìm xem -3 là số hạng thứ mấy của dãy số ?

Giải

a. Ta lần lượt có:

$u_1 = 15;\ u_2 = 9;\ u_3 = -6;\ u_4 = -15;\ u_5 = -9;\ u_6 = 6.$

b. Dễ thấy mọi số hạng của dãy số đều không nhận giá trị bằng -3.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{2n+1}{2n-1}$.

a. Viết 6 số hạng đầu của dãy.

b. Tìm xem $\dfrac{19}{17}$ là số hạng thứ mấy của dãy số ?

Bài tập 2. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n-1}{\sqrt{n^2+36}}$.

a. Viết 5 số hạng đầu của dãy.

b. Tìm xem $\dfrac{7}{10}$ là số hạng thứ mấy của dãy số ?

Bài tập 3. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{(-1)^n + n}{n+1}$.

a. Tìm u_9, u_{12}, u_{2n}, u_{2n+1}.

b. Tìm xem 0 là số hạng thứ mấy của dãy số ?

c. Tìm xem 1 là số hạng thứ mấy của dãy số ?

Bài tập 4. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 1, n \geq 3 \end{cases}$$

a. Hãy viết 6 số hạng đầu của dãy số.

b. Tìm xem 511 là số hạng thứ mấy của dãy số ?

Bài tập 5. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 2, u_2 = 3 \\ u_n = 3u_{n-2} - 2u_{n-1}, n \geq 3 \end{cases}$$

a. Tìm u_4, u_8.

b. Tìm xem 11 là số hạng thứ mấy của dãy số ?

Bài toán 2: Sử dụng phương pháp quy nạp chứng minh dãy số (u_n) thoả mãn tính chất K.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: (*Bước cơ sở*): Chứng minh rằng số hạng u_1 thoả mãn tính chất K.

Bước 2: (*Bước quy nạp*): Giả sử số hạng u_k thoả mãn tính chất K. Ta đi chứng minh số hạng u_{k+1} cũng thoả mãn tính chất K.

Bước 3: Kết luận dãy số (u_n) thoả mãn tính chất K.

Ví dụ 1: Cho dãy số (u_n) với $u_n = n^3 + 11n$. Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy số này đều chia hết cho 6.

Giải

Ta có: $u_1 = 1^3 + 11 = 12 \Rightarrow u_1 \vdots 6$.

Giả sử $u_k \vdots 6$, tức là $(k^3 + 11k) \vdots 6$. Ta đi chứng minh $u_{k+1} \vdots 6$.

Thật vậy: $u_{k+1} = (k+1)^3 + 11(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 11k + 11$

$$= (k^3 + 11k) + 3k(k+1) + 12$$

suy ra $u_{k+1} \vdots 6$ bởi $(k^3 + 11k) \vdots 6$, $3k(k+1) \vdots 6$ và $12 \vdots 6$.

Vậy, mọi số hạng của dãy số (u_n) đều chia hết cho 6.

Ví dụ 2: Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-2} + 2u_{n-1}, n \geq 3 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng $u_n < 6u_{n-2}$, $\forall n \geq 5$.

Giải

Ta có: $u_3 = 3, u_4 = 7, u_5 = 17 \Rightarrow u_5 < 6u_3$.

Giả sử công thức đúng với mọi $n \leq k$, tức là:

$$\begin{cases} u_k < 6u_{k-2} \\ u_{k-1} < 6u_{k-3} \end{cases}$$

ta đi chứng minh $u_{k+1} < 6u_{k-1}$.

Thật vậy: $u_{k+1} = u_{k-1} + 2u_k < 6u_{k-3} + 2.6u_{k-2} = 6(u_{k-3} + 2u_{k-2}) = 6u_{k-1}$, đpcm.

Vậy, ta luôn có $u_n < 6u_{n-2}$, $\forall n \geq 5$.

Ví dụ 3: Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}}, n \geq 2 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng $u_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

Giải

Ta có: $u_1 = \sqrt{2} = 2.\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos\frac{\pi}{2^2} \Rightarrow$ đúng với n = 1.

Giả sử $u_k = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}$. Ta đi chứng minh $u_{k+1} = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}$.

Thật vậy: $u_{k+1} = \sqrt{2+u_k} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}} = \sqrt{2\left(1+\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)}$

$$= \sqrt{2.2\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}}} = 2\left|\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}\right| = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}},$$

do $0 < \frac{\pi}{2^{k+2}} < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos\frac{\pi}{2^{k+2}} > 0$.

Vậy, ta luôn có $u_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 13^n - 1$. Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy số này đều chia hết cho 6.

Bài tập 2. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_n = 2u_{n-2} + u_{n-1},\ n \geq 3 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy số này đều là số lẻ.

Bài tập 3. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 2^{n+2}$. Chứng minh rằng $u_n > 2n + 5$.

Bài tập 4. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2 \\ u_n = u_{n-2} + 2u_{n-1},\ n \geq 3 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng $u_n \leq \left(\frac{5}{2}\right)^n$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Bài tập 5. * Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = a, u_2 = b \\ u_n = c.u_{n-1} + d.u_{n-2},\ n \geq 3 \end{cases}, \text{ với } cd \neq 0.$$

Chứng minh rằng $u_n = (e_1 + ne_2)r^n$ với e_1, e_2 là các hằng số phụ thuộc a, b và r là nghiệm kép của phương trình $x^2 - cx - d = 0$.

Áp dụng: Cho dãy số:

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = -3 \\ a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}, n \geq 3 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng $a_n = 3^{n-1} - 2(n-1).3^{n-1}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Hướng dẫn: Vì r là nghiệm kép của phương trình $x^2 - cx - d = 0$ nên $c = 2r$ và $d = -r^2$, do đó u_n có dạng $u_n = 2ru_{n-1} - r^2u_{n-2}$.

Bài tập 6. * Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = a, u_2 = b \\ u_n = c.u_{n-1} + d.u_{n-2}, n \geq 3 \end{cases}, \text{ với } cd \neq 0.$$

Chứng minh rằng $u_n = c_1r_1^n + c_2r_2^n$ với c_1, c_2 là các hằng số phụ thuộc a, b và r_1, r_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình $x^2 - cx - d = 0$.

Áp dụng: Cho dãy số:

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 3 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Hướng dẫn: Chứng minh bằng quy nạp.

Bài toán 3: Xác định công thức của dãy số (u_n).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Sử dụng biến đổi đại số để thu gọn và đơn giản biểu thức của u_n.

Cách 2: Sử dụng phương pháp quy nạp bằng việc thực hiện theo các bước:

- *Bước 1*: Viết một vài số hạng đầu của dãy, từ đó dự đoán công thức cho u_n.
- *Bước 2*: Chứng minh công thức dự đoán bằng phương pháp quy nạp.

Ví dụ 1: Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + 2, n \geq 2 \end{cases}.$$

Xác định công thức tính u_n theo n.

Giải

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Từ giả thiết ta có:

$u_1 = 1$

$u_2 = u_1 + 2$

$u_3 = u_2 + 2$

...

$u_n = u_{n-1} + 2$

Cộng theo vế các đẳng thức trên, ta được:

$u_n = 1 + 2(n - 1) = 2n - 1.$

Vậy, ta có $u_n = 2n - 1$.

Cách 2: Ta có:

$u_1 = 1 = 2.1 - 1$

$u_2 = 1 + 2 = 3 = 2.2 - 1$

$u_3 = 3 + 2 = 5 = 2.3 - 1$

Dự đoán $u_n = 2n - 1$. (1)

Ta đi chứng minh dự đoán trên bằng phương pháp quy nạp, thật vậy:

$u_1 = 2.1 - 1 = 1$, tức là công thức (1) đúng với n = 1.

Giả sử công thức (1) đúng với n = k, tức là $u_k = 2k - 1$. Ta đi chứng minh nó cũng đúng với n = k + 1.

Thật vậy:

$u_{k+1} = u_k + 2 = 2k - 1 + 2 = 2(k + 1) - 1$, tức là (1) đúng với n = k + 1.

Vậy, ta có $u_n = 2n - 1$.

Ví dụ 2: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ với mọi $n \in \mathbf{N}^*$ và dãy số (S_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} S_1 = u_1 \\ S_n = S_{n-1} + u_n, n \geq 2 \end{cases}.$$

Xác định công thức tính S_n theo n.

Giải

Ta có ngay: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

Mặt khác, ta có biểu diễn: $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

Từ đó, ta nhận được: $u_1 = 1 - \dfrac{1}{2}$

$$u_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$u_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

...

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Cộng theo vế các đẳng thức trên, ta được:

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Vậy, ta có $S_n = \frac{n}{n+1}$.

Ví dụ 3: Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 3u_{n-1},\ n \geq 2 \end{cases}.$$

Xác định công thức tính u_n theo n.

Giải

Ta có:

$u_1 = 1 = 3^0$

$u_2 = 3 = 3^1$

$u_3 = 3.3 = 3^2$

Dự đoán $u_n = 3^{n-1}$. (1)

Ta đi chứng minh dự đoán trên bằng phương pháp quy nạp, thật vậy:

$u_1 = 3^{1-1} = 1$, tức là công thức (1) đúng với n = 1.

Giả sử công thức (1) đúng với n = k, tức là $u_k = 3^{k-1}$. Ta đi chứng minh nó cũng đúng với n = k + 1.

Thật vậy: $u_{k+1} = 3u_k = 3.3^{k-1} = 3^k$, tức là (1) đúng với n = k + 1.

Vậy, ta có $u_n = 3^{n-1}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_n = 2u_{n-1},\ n \geq 2 \end{cases}.$$

Xác định công thức tính u_n theo n.

Bài tập 2. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}},\ n \geq 2 \end{cases}.$$

Xác định công thức tính u_n theo n.

Bài tập 3. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2}{n^2 + 4n + 3}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và dãy số (S_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} S_1 = u_1 \\ S_n = S_{n-1} + u_n, \ n \geq 2 \end{cases}.$$

Xác định công thức tính S_n theo n.

Bài tập 4. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_n = \frac{1}{3} u_{n-1}, \ n \geq 2 \end{cases}.$$

Xác định công thức tính u_n theo n.

Bài tập 5. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \frac{3}{u_{n-1}}, \ n \geq 2 \end{cases}.$$

Xác định công thức tính u_n theo n.

Bài toán 4: Xét tính đơn điệu của một dãy số (u_n).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lập hiệu $H = u_{n+1} - u_n$, từ đó xác định dấu của H.

Bước 2: Khi đó:

- Nếu $H > 0$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số (u_n) tăng.
- Nếu $H < 0$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số (u_n) giảm.

Cách 2: Nếu $u_n > 0$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có thể thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lập tỉ số $P = \frac{u_{n+1}}{u_n}$, từ đó so sánh P với 1.

Bước 2: Khi đó:

- Nếu $P > 1$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số (u_n) tăng.
- Nếu $P < 1$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số (u_n) giảm.

Ví dụ 1: Xét tính đơn điệu của các dãy số sau:

a. $u_n = \frac{n}{3^n}$. b. $u_n = n + \cos^2 n$. c. $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Giải

a. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Xét hiệu:

$$H = u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{3^{n+1}} - \frac{n}{3^n} = \frac{n+1-3n}{3^{n+1}} = \frac{1-2n}{3^{n+1}} < 0, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Vậy, dãy (u_n) giảm.

Cách 2: Dễ thấy $u_n > 0$ với $\forall n \in \mathbf{N}^*$, xét tỉ số:

$$P = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

do $1 + \frac{1}{n} < 2$ nên $P < 1$.

Vậy, dãy (u_n) giảm.

b. Xét hiệu:

$$H = u_{n+1} - u_n = n + 1 + \cos^2(n+1) - (n + \cos^2 n) = 1 - \cos^2 n + \cos^2(n+1)$$
$$= \sin^2 n + \cos^2(n+1) > 0, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Vậy, dãy (u_n) tăng.

c. Xét hiệu:

$$H = u_{n+1} - u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(-\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Thấy ngay dấu của H phụ thuộc vào tính chẵn, lẻ của n.

Vậy, dãy (u_n) không đơn điệu.

Ví dụ 2: Xét tính đơn điệu của dãy số (u_n), biết:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 1, n \geq 2 \end{cases}.$$

Giải

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1. Xét hiệu:

$$H = u_{n+1} - u_n = (2u_n + 1) - u_n = u_n + 1.$$

Ta sẽ đi chứng minh $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ bằng quy nạp.

Ta có:

$u_1 = 1 > 0$, tức công thức đúng với $n = 1$.

Giả sử công thức đúng với $n = k$, tức là $u_k > 0$, ta đi chứng minh $u_{k+1} > 0$.

Thật vậy: $u_{k+1} = 2u_k + 1 > 0$, đpcm.

Vậy, ta luôn có $u_n > 0, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Do đó $H > 0$, từ đó suy ra dãy (u_n) tăng.

Cách 2: Trước tiên, ta đi chứng minh $u_n > 0, \forall n \in \mathbf{N}^*$ *(tương tự như trong cách 1)*

Xét tỉ số: $P = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n} = 2 + \dfrac{1}{u_n} > 1$

Vậy, dãy (u_n) tăng.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Xét tính đơn điệu của các dãy số sau:

a. $u_n = \dfrac{n}{4^n}$.

b. $u_n = n + \sin^2 n$.

c. $u_n = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

d. $u_n = \dfrac{4 - n}{n}$.

e. $u_n = \dfrac{1}{n^2 + 1}$.

f. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n + 1}$.

Bài tập 2. Xét tính đơn điệu của dãy số (u_n), biết:

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = 2u_{n-1} - 1, n \geq 2 \end{cases}.$$

Bài tập 3. Xét tính đơn điệu của dãy số (u_n), biết:

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}.$$

Bài tập 4. Xét tính đơn điệu của dãy số (u_n), biết:

$$u_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2}}} \text{ (n dấu căn).}$$

Bài tập 5. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{n^2 + n}$ và dãy số (S_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} S_1 = u_1 \\ S_n = S_{n-1} + u_n, n \geq 2 \end{cases}.$$

a. Xét tính đơn điệu của các dãy số (u_n) và (S_n).

b. Xác định công thức tính S_n theo n.

Bài tập 6. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1}$ và dãy số (P_n) với:

$$P_n = u_1.u_2...u_n.$$

a. Xét tính đơn điệu của các dãy số (u_n) và (P_n).

b. Xác định công thức tính P_n theo n.

Bài toán 5: Xét tính bị chặn của một dãy số (u_n).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng định nghĩa:

- Nếu $\exists M \in \mathbf{R} : u_n \le M, \forall n \in \mathbf{N}^*$ thì (u_n) bị chặn trên.
- Nếu $\exists m \in \mathbf{R} : u_n \ge m, \forall n \in \mathbf{N}^*$ thì (u_n) bị chặn dưới.
- Nếu $\exists m, M \in \mathbf{R} : m \le u_n \le M, \forall n \in \mathbf{N}^*$ thì (u_n) bị chặn.

Chú ý: Dựa trên kết quả:

- Mọi dãy số (u_n) giảm luôn bị chặn trên bởi u_1.
- Mọi dãy số (u_n) tăng luôn bị chặn dưới bởi u_1.

Ví dụ 1: Xét tính bị chặn trên, bị chặn dưới, bị chặn của các dãy số sau:

a. $u_n = \frac{n^2+1}{n}$. b. $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$. c. $u_n = \frac{n-1}{\sqrt{n^2+1}}$.

Giải

a. Viết lại u_n dưới dạng:

$$u_n = n + \frac{1}{n} \overset{\text{Côsi}}{\ge} 2 \Rightarrow (u_n) \text{ bị chặn dưới bởi } 2.$$

Ta thấy ngay giá trị của u_n có thể lớn bao nhiêu tuỳ ý, do đó (u_n) không bị chặn trên.

Vậy, dãy (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn.

b. Ta thấy ngay:

- $u_n > 0$, do đó nó bị chặn dưới.
- Vì $n(n+1) \ge 2 \Leftrightarrow u_n \le \frac{1}{2}$, do đó nó bị chặn trên.

Vậy, ta được $0 < u_n \le \frac{1}{2}$, do đó nó bị chặn.

c. Ta thấy ngay:

- $u_n \ge 0$, do đó nó bị chặn dưới.
- Ta đi chứng minh $u_n \le 1$ với $\forall n \in \mathbf{N}^*$ bằng việc sử dụng biến đổi đại số, cụ thể:

$$\frac{n-1}{\sqrt{n^2+1}} \le 1 \Leftrightarrow \sqrt{n^2+1} \ge n-1 \Leftrightarrow n^2+1 \ge n^2-2n+1$$

$$\Leftrightarrow n \ge 0, \text{ luôn đúng.}$$

Vậy, ta luôn có $u_n \le 1$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, tức là (u_n) bị chặn dưới bởi 1

Vậy, ta được $0 \le u_n \le 1$, do đó nó bị chặn.

Ví dụ 2: Xét tính bị chặn trên, bị chặn dưới, bị chặn của dãy số sau:

$$u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Giải

Ta có: $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$

từ đó, ta thấy:

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

$\Rightarrow 0 \le u_n < 1$.

Vậy, dãy (u_n) bị chặn.

Ví dụ 3: Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = \dfrac{u_{n-1}+1}{2}, n \ge 2 \end{cases}$$

a. Chứng minh rằng (u_n) bị chặn dưới bởi 1.

b. Chứng minh rằng (u_n) giảm. Suy ra (u_n) bị chặn.

Giải

a. Ta đi chứng minh $u_n > 1$ với $\forall n \in \mathbf{N}^*$ bằng phương pháp quy nạp.

Ta có:

$u_1 = 2 > 1$, tức công thức đúng với $n = 1$.

Giả sử công thức đúng với $n = k$, tức là $u_k > 1$, ta đi chứng minh $u_{k+1} > 1$.

Thật vậy:

$$u_{k+1} = \frac{u_k + 1}{2} > \frac{1+1}{2} = 1, \text{ đpcm.}$$

Vậy, ta luôn có $u_n > 1$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, tức là (u_n) bị chặn dưới bởi 1.

b. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Xét hiệu:

$$H = u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 1}{2} - u_n = \frac{1 - u_n}{2} < \frac{1-1}{2} = 0.$$

Vậy, dãy (u_n) giảm.

Cách 2: Xét tỉ số:

$$P = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n + 1}{2u_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2u_n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Vậy, dãy (u_n) giảm.

Từ đó, suy ra $1 < u_n \le 2$ với $\forall n \in \mathbf{N}^*$, do đó (u_n) bị chặn.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Xét tính bị chặn trên, bị chặn dưới, bị chặn của các dãy số sau:

a. $u_n = \dfrac{n^2 - 1}{2n}$.　　b. $u_n = \dfrac{1}{n^2 - 1}$.　　c. $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$.

Bài tập 2. Xét tính bị chặn trên, bị chặn dưới, bị chặn của các dãy số sau:

a. $u_n = \dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{2.4} + ... + \dfrac{1}{n(n+2)}$.

b. $u_n = \dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{3.5} + ... + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

Bài tập 3. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = \dfrac{u_{n-1} + 8}{2}, n \geq 2 \end{cases}$$

a. Chứng minh rằng (u_n) bị chặn trên bởi 8.

b. Chứng minh rằng (u_n) tăng. Suy ra (u_n) bị chặn.

Bài tập 4. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}}, n \geq 2 \end{cases}$$

a. Tìm công thức biểu diễn u_n theo n.

b. Chứng minh rằng (u_n) bị chặn.

Bài tập 5. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \dfrac{u_{n-1} + 2}{u_{n-1} + 1}, n \geq 2 \end{cases}$$

a. Chứng minh rằng (u_n) bị chặn trên bởi $\dfrac{3}{2}$.

b. Chứng minh rằng (u_n) bị chặn dưới bởi 1.

CHỦ ĐỀ 2

GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

***Định nghĩa**: Số u được gọi là giới hạn của dãy số* (u_n) *nếu với mọi số* ε *dương tùy ý, tồn tại số tự nhiên* N *sao cho với mọi* $n > N$ *thì* $|u_n - u| < \varepsilon$.

Như vậy:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}^*: |u_n - u| < \varepsilon \text{ với } n > N.$$

2. CÁC ĐỊNH LÍ VỀ GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

Định lí 1: (*Điều kiện cần để dãy số có giới hạn*): *Nếu một dãy số có giới hạn thì nó bị chặn.*

Định lí 2: (*Định lí Vaiơstrat – Điều kiện đủ để dãy số có giới hạn*):

- *Một dãy số tăng và bị chặn trên thì có giới hạn.*
- *Một dãy số giảm và bị chặn dưới thì có giới hạn.*

Định lí 3: (*Tính duy nhất của giới hạn*): *Nếu một dãy số có giới hạn thì giới hạn đó là duy nhất.*

Định lí 4: (*Các phép toán trên các giới hạn của dãy số*): *Nếu hai dãy số* (a_n) *và* (b_n) *có giới hạn thì ta có:*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n.b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n . \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}, \text{ với } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0.$$

Định lí 5: *Nếu hai dãy số* (a_n) *và* (b_n) *có giới hạn và* $a_n \le b_n$ *với mọi n thì*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Định lí 6: (*Nguyên lí kẹp giữa*): *Cho ba dãy số* (a_n), (b_n) *và* (c_n) *sao cho* $a_n \le b_n \le c_n$ *và* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$.

3. CÁC GIỚI HẠN CƠ BẢN

Ta có:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$, với C là hằng số.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = 0$, với $\alpha > 0$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, với $|q| < 1$.

4. DÃY SỐ DẦN TỚI VÔ CỰC

***Định nghĩa**: Dãy số (u_n) gọi là dần tới $+\infty$ nếu với mọi số dương M tuỳ ý, tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi $n > N$ thì $u_n > M$.*

Như vậy:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in \mathbf{N}^*: u_n > M \text{ với } n > N.$$

Tương tự, ta có định nghĩa:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in \mathbf{N}^*: u_n < -M \text{ với } n > N.$$

Ta có các kết quả sau:

1. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$.
2. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{u_n} = \infty$.

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Sử dụng định nghĩa chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Với $\forall\varepsilon > 0$, xuất phát từ bất đẳng thức:

$$|u_n - u| < \varepsilon \Rightarrow n > g(\varepsilon).$$

Bước 2: Chọn $N = [g(\varepsilon)] + 1$.

Bước 3: Vậy:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}^*: |u_n - u| < \varepsilon \text{ với } n > N \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = u.$$

Ví dụ 1: Dùng định nghĩa giới hạn, chứng minh rằng:

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+2} = 1$. b. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2+1} = 0$. c. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2n}{n^2+2n+2} = 1$.

Giải

a. Với $\forall\varepsilon > 0$, ta xét:

$$\left|\frac{n}{n+2} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{2}{n+2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{n+2} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon} - 2.$$

Chọn $N = \left[\dfrac{2}{\varepsilon} - 2\right] + 1$, ta được:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}^*: \left|\frac{n}{n+2} - 1\right| < \varepsilon \text{ với } n > N \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1.$$

b. Với $\forall\varepsilon > 0$, ta xét:

$$\left|\frac{n}{n^2+1} - 0\right| = \frac{n}{n^2+1} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Chọn $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, ta được:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}^*: \left|\frac{n}{n^2+1}\right| < \varepsilon \text{ với } n > N \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0.$$

c. Với $\forall\varepsilon > 0$, ta xét:

$$\left|\frac{n^2+2n}{n^2+2n+2} - 1\right| = \frac{2}{n^2+2n+2} < \frac{2}{n^2+2n+1} = \frac{2}{(n+1)^2} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} - 1.$$

Chọn $N = \left[\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} - 1\right] + 1$, ta được:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}^*: \left|\frac{n^2+2n}{n^2+2n+2} - 1\right| < \varepsilon \text{ với } n > N \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n}{n^2+2n+2} = 1.$$

Ví dụ 2: Dùng định nghĩa giới hạn, chứng minh rằng:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0.$$

Giải

Với $\forall\varepsilon > 0$, ta xét:

$$\left|(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - 0\right| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{1}{4\varepsilon^2}.$$

Chọn $N = \left[\frac{1}{4\varepsilon^2}\right] + 1$, ta được:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}^*: \left|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right| < \varepsilon \text{ với } n > N \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Dùng định nghĩa giới hạn, chứng minh rằng:

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$ b. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+5}{3n+1} = \frac{2}{3}.$

Bài tập 2. Dùng định nghĩa giới hạn, chứng minh rằng:

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2+1} = 0.$ b. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+4n}{n^2+4n+5} = 1.$

Bài tập 3. Dùng định nghĩa giới hạn, chứng minh rằng:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) = 0.$$

Bài tập 4. Dùng định nghĩa giới hạn, chứng minh rằng:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) = \frac{1}{2}.$$

Bài toán 2: Chứng minh một dãy số có giới hạn.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng định lí Vaiơstrat, cụ thể:

- Một dãy số tăng và bị chặn trên thì có giới hạn.
- Một dãy số giảm và bị chặn dưới thì có giới hạn.

Ví dụ 1: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{2n}$. Chứng minh rằng dãy số này có giới hạn.

Giải

Ta sẽ đi chứng minh dãy số (u_n) tăng và bị chặn trên.

- Chứng minh dãy số (u_n) tăng. Xét hiệu:

$$H = u_{n+1} - u_n$$

$$= \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + ... + \frac{1}{2(n+1)}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0.$$

Vậy, dãy (u_n) tăng.

- Chứng minh dãy số (u_n) bị chặn trên. Ta có:

$$u_n < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1.$$

Vậy, dãy (u_n) bị chặn trên bởi 1.

Vậy, dãy (u_n) có giới hạn.

Ví dụ 2: * Cho dãy số (u_n) với $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Chứng minh rằng dãy số này có giới hạn.

Giải

Ta sẽ đi chứng minh dãy số (u_n) giảm và bị chặn dưới.

- Chứng minh dãy số (u_n) giảm. Thật vậy, dễ thấy $u_n > 0$ với $\forall n \in \mathbf{N}^*$, xét tỉ số:

$$P = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} : \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+2}{n+1}.\frac{n}{n+1}\right)^n . \frac{n+2}{n+1}$$

$$= \left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^n . \left(1+\frac{1}{n+1}\right).$$

Theo bất đẳng thức Bernoulli $(1 + a)^n > 1 + na$, do đó:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right) < \left[1+\frac{1}{(n+1)^2}\right]^n$$

suy ra:

$$P < \left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^n . \left[1+\frac{1}{(n+1)^2}\right]^n = \left[1-\frac{1}{(n+1)^4}\right]^n < 1.$$

Vậy, dãy (u_n) giảm.

- Chứng minh dãy số (u_n) bị chặn dưới. Ta có $u_n > 1$, tức là nó bị chặn dưới.

Vậy, dãy (u_n) có giới hạn.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$. Chứng minh rằng dãy số này có giới hạn.

Bài tập 2. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Chứng minh rằng dãy số này có giới hạn.

Bài tập 3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}},\ n \geq 2 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng dãy số này có giới hạn.

Bài toán 3: Tính giới hạn của dãy số bằng các định lí về giới hạn.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: Đưa dãy số cần tìm giới hạn về dạng tổng hiệu, tích, thương của những dãy số mà ta đã biết giới hạn.

Ta có các kết quả sau:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$, với C là hằng số.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = 0$, với $\alpha > 0$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, với $|q| < 1$.
4. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$.
5. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{u_n} = \infty$.

Cách 2: Sử dụng nguyên lí kẹp giữa.

Ví dụ 1: Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{n+2}$. b. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n^2+2}$. c. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3}{n+1}$.

Giải

a. Ta biến đổi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n}} = \frac{2}{1} = 2.$$

b. Ta biến đổi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

c. Ta biến đổi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}} = \frac{1}{0} = \infty.$$

Ví dụ 2: Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{2n+3}$.

b. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+\sqrt[3]{n^3+1}+n\sqrt{n}}{n\sqrt{n^2+1}+3}$.

Giải

a. Ta biến đổi:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{2+\frac{3}{n}}=\frac{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}}{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}}=\frac{1}{2}.$$

b. Ta biến đổi:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\sqrt[3]{n^3+1}+n\sqrt{n}}{n\sqrt{n^2+1}+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[3]{\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^6}}+\sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^2}}}=1.$$

Ví dụ 3: Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

b. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+\sqrt[3]{1-n^3}}{\sqrt{n^2+1}-n}$.

Giải

a. Ta thực hiện phép nhân liên hợp:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.$$

b. Ta thực hiện phép nhân liên hợp:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt[3]{1-n^3}}{\sqrt{n^2+1}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^3+1-n^3)(\sqrt{n^2+1}+n)}{(n^2+1-n^2)\left[n^2-n\sqrt[3]{1-n^3}+\sqrt[3]{(1-n^3)^2}\right]}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{n^2-n\sqrt[3]{1-n^3}+\sqrt[3]{(1-n^3)^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n}}}{1-\sqrt[3]{\frac{1}{n^3}-1}+\sqrt[3]{\left(\frac{1}{n^3}-1\right)^2}}=\frac{0}{1+1+1}=0.$$

Ví dụ 4: Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-4^n}{1+4^n}$.   b. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n-4^{n+1}}{3^{n+2}+4^n}$.

Giải

a. Ta biến đổi:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-4^n}{1+4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{4^n}-1}{\frac{1}{4^n}+1}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n-1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n+1}=-1.$$

b. Ta biến đổi:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-4^{n+1}}{3^{n+2}+4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^n}{4^n}-4}{3.\frac{3^n}{4^n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n-4}{3\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n-4}{\lim\limits_{n\to\infty}3.\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}=-4.$$

Ví dụ 5: Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+...+a^n}{1+b+b^2+...+b^n}$, với $|a|, |b|<1$.

b. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)...\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Giải

Ta biến đổi:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+...+a^n}{1+b+b^2+...+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+a+a^2+...+a^n)(1-a)(1-b)}{(1+b+b^2+...+b^n)(1-b)(1-a)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-a^{n+1}}{1-b^{n+1}}=\frac{1-\lim\limits_{n\to\infty}a^{n+1}}{1-\lim\limits_{n\to\infty}b^{n+1}}=1.$$

Ta biến đổi:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1.3}{2^2}.\frac{2.4}{3^2}...\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}.\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}.$$

Ví dụ 6: Tính giới hạn sau:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n}.$$

Giải

Ta biến đổi:

$$u_n=\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n}\Leftrightarrow u_n^2=\frac{1.3}{2^2}.\frac{3.5}{4^2}.\frac{5.7}{6^2}...\frac{(2n-1).(2n+1)}{(2n)^2}.\frac{1}{2n+1}$$

$$\Rightarrow u_n^2<\frac{1}{2n+1}\Rightarrow 0<u_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Nhận xét rằng:

$$\lim_{n\to\infty}0=0 \text{ và } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$$

suy ra $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0.$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+2}$.

b. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+2n+1}{3n^3+2n^2+6}$.

c. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n+1}{n^2+6}$.

d. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n-1}$.

Bài tập 2. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n+1}}{2n+\sqrt{n}+1}$.

b. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\sqrt[3]{n^3+1}+n\sqrt{n}}{2n\sqrt{n^2+1}+1}$.

Bài tập 3. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-n+1}-\sqrt{n^2+1})$.

b. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-\sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt{n^2+1}-n}$.

Bài tập 4. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2^n}{1+2^n}$.

b. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n-1}-4^{n+1}}{3^{n+2}+4^{n+2}}$.

Bài tập 5. Tính giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n.(n+1)}\right]$.

b. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^2}+...+\frac{2n-1}{n^2}\right)$.

Bài tập 6. Tính giới hạn sau:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right).$$

CHỦ ĐỀ 3

CẤP SỐ CỘNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

Dãy số (u_n) được xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = u \\ u_{n+1} = u_n + d, \forall n \in N^* \end{cases}$$

(u, d là hai số thực cho trước) được gọi là cấp số cộng.

- u là số hạng đầu tiên.
- d là công sai.

Đặc biệt khi d = 0 thì (u_n) là dãy số trong đó tất cả các số hạng đều bằng nhau.

2. CÁC TÍNH CHẤT

- Số hạng thứ n được cho bởi công thức:

$$u_n = u_1 + (n - 1)d.$$

- u_n, u_{n+1}, u_{n+2} là ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng (u_n) nếu:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n+2}).$$

- Tổng của n số hạng đầu tiên S_n được cho bởi công thức:

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$$

$$= \frac{n}{2}[2u_1 + (n - 1)d].$$

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Chứng minh tính chất của một cấp số cộng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Câu hỏi thường được đặt ra là:

" *Cho ba số a, b, c lập thành cấp số cộng, chứng minh tính chất K* "

khi đó, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Từ giả thiết a, b, c lập thành một cấp số cộng, ta được:

$$a + c = 2b$$

hoặc biểu thức tương đương $a - b = b - c = \frac{1}{2}(a - c)$.

Bước 2: Chứng minh tính chất K.

Ví dụ 1: Cho ba số a, b, c lập thành một cấp số cộng. Chứng minh rằng:

$$a^2 + 2bc = c^2 + 2ab.$$

Giải

Từ giả thiết a, b, c lập thành một cấp số cộng, ta được:

$$a + c = 2b.$$

Khi đó:

$$a^2 + 2bc = a^2 + (a + c)c = a^2 + ac + c^2 = a(a + c) + c^2 = 2ab + c^2, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 2: Cho (a_n) là một cấp số cộng. Chứng minh rằng:

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-k} + a_{n+k}), \text{ với mọi } n > k.$$

Giải

Ta có ngay:

$$a_n = a_{n-k} + (n - n + k)d = a_{n-k} + kd$$

$$a_{n+k} = a_{n-k} + (n + k - n + k)d = a_{n-k} + 2kd$$

suy ra:

$$\frac{1}{2}(a_{n-k} + a_{n+k}) = \frac{1}{2}(a_{n-k} + a_{n-k} + 2kd) = a_{n-k} + kd = a_n, \text{ đpcm.}$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho ba số a, b, c lập thành một cấp số cộng. Chứng minh rằng:

$$a^2 + 8bc = (2b + c)^2.$$

Bài tập 2. Cho (a_n) là một cấp số cộng. Chứng minh rằng:

a. $a_1 + a_n = a_k + a_{n-k+1}$, với $k = 1, 2, ..., n$.

b. $(q - r)a_p + (r - p)a_q + (p - q)a_r = 0$.

c. $\dfrac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \dfrac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \dfrac{n - 1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}$,

với $a_i > 0$, $i = \overline{1,n}$.

Bài tập 3. Cho (a_n) là một cấp số cộng. Hỏi các dãy số sau có phải là cấp số cộng không ?

a. $a_1, a_3, a_5, ..., a_{2n-1}, ...$

b. $a_2, a_4, a_6, ..., a_{2n}, ...$

Bài tập 4. Cho (a_n) là một cấp số cộng. Hỏi các dãy số sau có phải là cấp số cộng không ?

a. $(a_n + p)$, với p là số thực tuỳ ý.

b. $(p.a_n)$, với p là số thực tuỳ ý.

c. $\left(\dfrac{p}{a_n}\right)$, với p là số thực tuỳ ý.

Bài toán 2: Chứng minh ba số lập thành một cấp số cộng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để chứng minh ba số a, b, c lập thành cấp số cộng, ta đi chứng minh:

$$a + c = 2b \text{ hoặc } a - b = b - c.$$

Ví dụ 1: Cho ba số a, b, c lập thành một cấp số cộng. Chứng minh rằng ba số $(a^2 + ab + b^2)$, $(a^2 + ac + c^2)$, $(b^2 + bc + c^2)$ cũng lập thành một cấp số cộng.

Giải

Từ giả thiết a, b, c lập thành một cấp số cộng, ta được:

$$a + c = 2b.$$

Nhận xét rằng:

$$\begin{aligned}(a^2 + ab + b^2) + (b^2 + bc + c^2) &= a^2 + (ab + bc) + 2b^2 + c^2\\ &= a^2 + b(a + c) + 2b^2 + c^2 = a^2 + 4b^2 + c^2\\ &= a^2 + (a + c)^2 + c^2 = 2(a^2 + ac + c^2).\end{aligned}$$

Vậy, ba số $(a^2 + ab + b^2)$, $(a^2 + ac + c^2)$, $(b^2 + bc + c^2)$ cũng lập thành một cấp số cộng.

Ví dụ 2: Cho ba số dương a, b, c lập thành một cấp số cộng. Chứng minh rằng ba số $\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$, $\frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}$, $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ cũng lập thành một cấp số cộng.

Giải

Từ giả thiết a, b, c lập thành một cấp số cộng, ta được:

$$a + c = 2b \Leftrightarrow a - b = b - c = \frac{1}{2}(a - c).$$

Nhận xét rằng:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} &= \frac{\sqrt{b} - \sqrt{c}}{b - c} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}\\ &= \frac{\sqrt{b} - \sqrt{c}}{a - b} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{c} + \sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}\\ &= \frac{\sqrt{a} - \sqrt{c}}{\frac{1}{2}(a - c)} = \frac{2}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}.\end{aligned}$$

Vậy, ba số $\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$, $\frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}$, $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ cũng lập thành một cấp số cộng.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho ba số a, b, c lập thành một cấp số cộng. Chứng minh rằng ba số $(a + b)^2$, $c^2 + 2c$, $4(a + b) + 2$ cũng lập thành một cấp số cộng.

Bài tập 2. Cho ba số a^2, b^2, c^2 lập thành một cấp số cộng có công sai khác 0. Chứng minh rằng ba số $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ cũng lập thành một cấp số cộng.

Bài toán 3: Tìm điều kiện của tham số để ba số lập thành một cấp số cộng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để ba số a, b, c lập thành cấp số cộng, điều kiện là:

$a + c = 2b$, bài toán được chuyển về việc giải phương trình.

Ví dụ 1: Tìm x để ba số $x^2 + 1$, $x - 2$, $1 - 3x$ lập thành một cấp số cộng.

Giải

Để ba số $x^2 + 1$, $x - 2$, $1 - 3x$ lập thành một cấp số cộng, điều kiện là:

$$(x^2 + 1) + (1 - 3x) = 2(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3.$$

Vậy, với x = 2 hoặc x = 3 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý: Một bài toán rất quen thuộc đối với phương trình trùng phương là:

" *Tìm điều kiện của tham số sao cho phương trình:*

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \text{ với } a \neq 0 \qquad (1)$$

có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 *lập thành cấp số cộng* "

Ta thực hiện như sau:

Điều kiện cần: Giả sử phương trình có ba nghiệm phân biệt thành cấp số cộng, khi đó:

$$x_1 + x_3 = 2x_2,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow 3x_2 = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow x_2 = -\frac{b}{3a}.$$

Với $x_2 = -\frac{b}{3a}$ thay vào (1) ta được:

$$a\left(-\frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(-\frac{b}{3a}\right) + d = 0$$

$$\Leftrightarrow 2b^3 - 9abc + 27a^2d = 0. \qquad (2)$$

Đó chính là điều kiện cần để (1) có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng.

Điều kiện đủ: Từ (2) suy ra phương trình có nghiệm $x_2 = -\frac{b}{3a}$. Khi đó:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow x_1 + x_3 - \frac{b}{3a} = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow x_1 + x_3 = -\frac{2b}{3a} = 2x_2$$

$\Leftrightarrow x_1, x_2, x_3$ lập thành cấp số cộng.

Vậy, điều kiện cần và đủ để (1) có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng là:

$$2b^3 - 9abc + 27a^2d = 0.$$

Với bài toán một tham số m, trong điều kiện đủ ta có thể khẳng định bằng việc chỉ ra nghiệm cụ thể của phương trình. Hãy nhớ điều này rất quan trọng bởi khi đó ta còn phải khẳng định phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.

Ví dụ 2: Xác định m để phương trình:

$$x^3 - 3x^2 - 9x + m = 0 \qquad (1)$$

có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

Giải

Điều kiện cần: Giả sử phương trình có ba nghiệm phân biệt thành cấp số cộng, khi đó:

$$x_1 + x_3 = 2x_2, \qquad (*)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3 \Leftrightarrow 3x_2 = 3 \Leftrightarrow x_2 = 1.$$

Với $x_2 = -1$ thay vào (1) ta được:

$$11 - m = 0 \Leftrightarrow m = 11.$$

Đó chính là điều kiện cần để (1) có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng.

Điều kiện đủ: Với m=11, ta được:

$$x^3 - 3x^2 - 9x + 11 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x - 11) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 - \sqrt{12} \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 + \sqrt{12} \end{array}\right., \text{ thoả mãn } (*)$$

Vậy, với m=11 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý: Trong bài toán trên ở điều kiện đủ ta khẳng định được:

- Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt.
- Ta có $x_1 + x_3 = 2x_2$, tức là x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số cộng.
- Do đó, có kết luận m = 11 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Tuy nhiên, tồn tại bài toán mà các giá trị của tham số tìm được trong điều kiện cần không thoả mãn điều kiện đủ.

Bài toán trên có thể được giải bằng phương pháp hằng số bất định, như sau:

Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng

$\Leftrightarrow$ (1) có ba nghiệm $x_0 - d, x_0, x_0 + d$, với $d \neq 0$.

Khi đó:

$$x^3 - 3x^2 - 9x + m = [x - (x_0 - d)](x - x_0)[x - (x_0 + d)]$$
$$= (x - x_0)[(x - x_0)^2 - d^2]$$
$$= x^3 - 3x_0x^2 + (3x_0^2 - d^2)x - x_0^3 + d^2x_0.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3 = -3x_0 \\ -9 = 3x_0^2 - d^2 \\ m = -x_0^3 + d^2x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ d = \pm 2\sqrt{3}. \\ m = 11 \end{cases}$$

Vậy, với m=11 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý: Một bài toán rất quen thuộc đối với phương trình trùng phương là:

" Tìm điều kiện của tham số để phương trình

$$ax^4 + bx^2 + c = 0. \qquad (1)$$

có bốn nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng."

Khi đó, ta thực hiện như sau:

Đặt $t = x^2$, điều kiện $t \geq 0$.

Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$at^2 + bt + c = 0. \qquad (2)$$

Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt dương $0 < t_1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ -b/a > 0 \\ c/a > 0 \end{cases} \qquad (3)$$

và khi đó bốn nghiệm của (1) là $-\sqrt{t_2}$, $-\sqrt{t_1}$, $\sqrt{t_1}$, $\sqrt{t_2}$.

Bốn nghiệm trên lập thành cấp số cộng khi:

$$\begin{cases} -\sqrt{t_2} + \sqrt{t_1} = -2\sqrt{t_1} \\ -\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} = 2\sqrt{t_1} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1. \qquad (4)$$

Theo định lí Viét ta có:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = -b/a \\ t_1t_2 = c/a \end{cases} \qquad (I)$$

Thay (4) vào (I) được :

$$\begin{cases} t_1 + 9t_1 = -b/a \\ t_1.(9t_1) = c/a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -\dfrac{b}{10a} \\ t_1^2 = \dfrac{c}{9a} \end{cases} \Rightarrow \left(-\frac{b}{10a}\right)^2 = \frac{c}{9a}. \qquad (5)$$

Kết hợp (5) và (3) nhận được điều kiện của tham số.

Để minh hoạ chúng ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 3: Cho phương trình:

$$x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1 = 0. \qquad (1)$$

Xác định m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

Giải

Đặt $t = x^2$, điều kiện $t \geq 0$.

Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$t^2 - 2(m+1)t + 2m + 1 = 0 \qquad (2)$$

Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt dương $0 < t_1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ -b/a > 0 \\ c/a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - 2m - 1 > 0 \\ 2(m+1) > 0 \\ 2m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m \neq 0,$$

và khi đó bốn nghiệm của (1) là $-\sqrt{t_2}$, $-\sqrt{t_1}$, $\sqrt{t_1}$, $\sqrt{t_2}$.

Bốn nghiệm trên lập thành cấp số cộng khi :

$$\begin{cases} -\sqrt{t_2} + \sqrt{t_1} = -2\sqrt{t_1} \\ -\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} = 2\sqrt{t_1} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1. \qquad (3)$$

Theo định lí Viét ta có:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 2(m+1) \\ t_1 t_2 = 2m + 1 \end{cases} \qquad (I)$$

Thay (3) vào (I) được :

$$\begin{cases} t_1 + 9t_1 = 2(m+1) \\ t_1.(9t_1) = 2m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5t_1 = m + 1 \\ 9t_1^2 = 2m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow 9m^2 - 32m - 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = -\frac{4}{9} \end{array}\right.$$

Vậy, với $m = 4$ hoặc $m = -\frac{4}{9}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tìm x để ba số sau lập thành một cấp số cộng:

a. $x^2 - x + 1, x - 2, 1 - 2x$.

b. $x^3 + x^2 + 1, x^2 + 1, x^2 - x + 1$.

Bài tập 2. Xác định a, b để phương trình:

$$x^3 + ax + b = 0$$

có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số cộng.

Bài tập 3. Cho phương trình:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 . Chứng minh rằng 3 nghiệm đó lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi $2a^3 - 9ab + 27c = 0$.

Bài tập 4. Xác định m để các phương trình sau có các nghiệm lập thành một cấp số cộng :

a. $x^3 - 3x^2 + mx + 2 - m = 0$.

b. $2x^4 + mx^2 + 2 = 0$.

c. $x^4 - 2(m + 1)x^2 + 2m + 1 = 0$.

d. $mx^4 - 2(m - 1)x^2 + m - 1 = 0$.

Bài toán 4: Tìm các phần tử của một cấp số cộng (u_n).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Thông thường bài toán được chuyển về xác định u_1 và công sai d.

Ví dụ 1: Cho cấp số cộng (u_n) thoả mãn $u_2 - u_3 + u_5 = 10$ và $u_1 + u_6 = 17$.

a. Tìm số hạng đầu tiên và công sai.

b. Tính tổng số của 20 số hạng đầu tiên.

c. Tính tổng $S' = u_5 + u_6 + ... + u_{24}$.

Giải

a. Gọi d là công sai của cấp số cộng (u_n), ta có:

$$\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u_1 + d) - (u_1 + 2d) + (u_1 + 4d) = 10 \\ u_1 + (u_1 + 5d) = 17 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 10 \\ 2u_1 + 5d = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3 \end{cases}.$$

Vậy, cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1$ và $d = 3$.

b. Ta có:

$$S_{20} = u_1 + u_2 + ... + u_{20}$$

$$= \frac{20}{2}[2u_1 + (20 - 1)d] = \frac{20}{2}[2.1 + (20 - 1).3] = 590.$$

c. Ta có:

$$S_{20} = S' = u_5 + u_6 + ... + u_{24}$$

$$= \frac{20}{2}[2u_5 + (20 - 1)d] = \frac{20}{2}[2(1 + 4.3) + (20 - 1).3] = 830.$$

Ví dụ 2: Ba góc của một tam giác vuông lập thành một cấp số cộng. Tìm ba góc đó.

Giải

Xét ΔABC vuông tại A, có ba góc $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ lập thành một cấp số cộng.

Ta được:

$$\begin{cases}\hat{A} = 90^0\\ \hat{B} + \hat{C} = 90^0\\ \hat{A} + \hat{C} = 2\hat{B}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\hat{A} = 90^0\\ \hat{B} + \hat{C} = 90^0\\ 2\hat{B} - \hat{C} = 90^0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\hat{A} = 90^0\\ \hat{B} = 60^0\\ \hat{C} = 30^0\end{cases}.$$

Vậy, ta được $\hat{A} = 90^0$, $\hat{B} = 60^0$, $\hat{C} = 30^0$.

Ví dụ 3: Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 16 và tổng bình phương của chúng bằng 84.

Giải

Gọi $d = 2x$ là công sai, ta có bốn số là $a - 3x$, $a - x$, $a + x$, $a + 3x$.

Khi đó, từ giả thiết ta có:

$$\begin{cases}(a - 3x) + (a - x) + (a + x) + (a + 3x) = 16\\ (a - 3x)^2 + (a - x)^2 + (a + x)^2 + (a + 3x)^2 = 84\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}4a = 16\\ 4a^2 + 20x^2 = 84\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = 4\\ x = \pm 1\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1, 3, 5, 7\\ 7, 5, 3, 1\end{array}\right.$$

Vậy, bốn số cần tìm là 1, 3, 5, 7.

Chú ý: Nếu không biết biểu diễn bốn số dưới dạng đối xứng như trên thì sẽ phải giải một hệ bậc hai khá phức tạp, cụ thể:

Gọi d là công sai của cấp số cộng x, y, z, t thoả mãn điều kiện đầu bài, ta có:

$$\begin{cases}x + y + z + t = 14\\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 94\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x + (x + d) + (x + 2d) + (x + 3d) = 14\\ x^2 + (x + d)^2 + (x + 2d)^2 + (x + 3d)^2 = 94\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x + 3d = 7\\ 2x^2 + 6xd + 7d^2 = 47\end{cases}.$$

Như vậy:

- Với ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, ta đặt:
  $a - x$, a, $a + x$, trong đó x là công sai.
- Với bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, ta đặt:
  $a - 3x$, $a - x$, $a + x$, $a + 3x$, trong đó x là công sai.
- Với năm số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, ta đặt:
  $a - 2x$, $a - x$, a, $a + x$, $a + 2x$, trong đó x là công sai.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho cấp số cộng (u_n) thoả mãn $u_2 - u_3 + u_5 = 10$ và $u_4 + u_6 = 26$. Tìm số hạng đầu tiên và công sai.

Bài tập 2. Cho cấp số cộng (u_n) thoả mãn $u_7 - u_3 = 8$ và $u_2.u_7 = 75$. Tìm số hạng đầu tiên và công sai.

Bài tập 3. Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 20 và tổng bình phương của chúng bằng 120.

Bài tập 4. Tìm năm số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 25 và tổng bình phương của chúng bằng 165.

Bài toán 5: Tính tổng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Thông thường bài toán được chuyển về tính tổng của một cấp số cộng.

Ví dụ 1: Tính tổng sau:

$$S = 105 + 110 + 115 + ... + 995.$$

Giải

Xét cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 105$ và công sai $d = 5$, ta được:

$$995 = u_n = u_1 + (n-1)d = 105 + 5(n-1) \Leftrightarrow n = 179$$

$$S = S_{179} = \frac{179}{2}(u_1 + u_{179}) = \frac{179}{2}(105 + 995) = 98450.$$

Ví dụ 2: Tính tổng sau: $S = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + ... + 2^2 - 1^2$.

Giải

Viết lại tổng S dưới dạng: $S = 199 + 195 + ... + 3$.

Xét cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 199$ và công sai $d = -4$, ta được:

$$3 = u_n = u_1 + (n-1)d = 199 - 4(n-1) \Leftrightarrow n = 50$$

$$S = S_{50} = \frac{50}{2}(u_1 + u_{50}) = \frac{50}{2}(199 + 3) = 5050.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tính các tổng sau:

a. $S = 55 + 60 + 65 + ... + 855$.

b. $S = 999 + 996 + 993 + ... + 3$.

Bài tập 2. Tính tổng sau:

$$S = 200^2 - 199^2 + 198^2 - 197^2 + ... + 2^2 - 1^2.$$

CHỦ ĐỀ 4

CẤP SỐ NHÂN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

Dãy số (u_n) được xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = u \\ u_{n+1} = u_n.q, \ \forall n \in N^* \end{cases}$$

(u, q là hai số thực khác 0 cho trước) được gọi là cấp số nhân.

- u là số hạng đầu tiên.
- q là công bội.

Đặc biệt khi q = 1 thì (u_n) là dãy số trong đó tất cả các số hạng đều bằng nhau.

2. CÁC TÍNH CHẤT

- Số hạng thứ n được cho bởi công thức:
$$u_n = u_1.q^{n-1}.$$
- u_n, u_{n+1}, u_{n+2} là ba số hạng liên tiếp của cấp số nhân (u_n) nếu:
$$u_{n+1}^2 = u_n.u_{n+2}.$$
- Tổng của n số hạng đầu tiên S_n được cho bởi công thức:
$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = u_1.\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$
$$S = u_1 + u_2 + ... = \frac{u_1}{1 - q}, \text{ với } |q| < 1.$$

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Chứng minh tính chất của một cấp số nhân.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Câu hỏi thường được đặt ra là:

" Cho ba số a, b, c lập thành cấp số nhân, chứng minh tính chất K "

khi đó, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Từ giả thiết a, b, c lập thành một cấp số nhân, ta được:

$$a.c = b^2.$$

Bước 2: Chứng minh tính chất K.

Ví dụ 1: Cho ba số a, b, c lập thành một cấp số nhân. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + b^2)(b^2 + c^2) = (ab + bc)^2.$$

Giải

Từ giả thiết a, b, c lập thành một cấp số nhân, ta được:

$$a.c = b^2.$$

Khi đó:

$$(a^2 + b^2)(b^2 + c^2) = a^2b^2 + a^2c^2 + b^4 + b^2c^2 = a^2b^2 + acb^2 + acb^2 + b^2c^2$$

$$= a^2b^2 + 2ab^2c + b^2c^2 = (ab + bc)^2\text{, đpcm.}$$

Ví dụ 2: Cho (a_n) là một cấp số nhân. Chứng minh rằng:

$$a_1.a_n = a_k.a_{n-k+1}\text{, với } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Giải

Ta có ngay:

$$VT = a_1.a_n = a_1.a_1.q^{n-1} = a_1^2.q^{n-1}$$

$$VP = a_k.a_{n-k+1} = a_1.q^{k-1}.a_1.q^{n-k} = a_1^2.q^{n-1}$$

suy ra VT = VP, đpcm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho ba số a, b, c lập thành một cấp số nhân. Chứng minh rằng:

a. $(ab + bc + ca)^3 = abc(a + b + c)^3$.

b. $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$.

c. $\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right)a^2b^2c^2 = a^3 + b^3 + c^3$.

Bài tập 2. Cho cấp số nhân (a_n). Có thể (a_n) cũng lập thành một cấp số cộng hay không ?

Bài tập 3. Cho (a_n) là một cấp số nhân. Hỏi các dãy số sau có phải là cấp số nhân không ?

a. $a_1, a_3, a_5, \ldots, a_{2n-1}, \ldots$

b. $a_2, a_4, a_6, \ldots, a_{2n}, \ldots$

Bài tập 4. Cho (a_n) là một cấp số nhân. Hỏi các dãy số sau có phải là cấp số nhân không ?

a. $(a_n + p)$, với p là số thực tuỳ ý.

b. $(p.a_n)$, với p là số thực khác 0.

c. $\left(\frac{p}{a_n}\right)$, với p là số thực khác 0.

d. (a_n^k), với $k \in \mathbf{Z}^+$.

Bài toán 2: Chứng minh ba số lập thành một cấp số nhân.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để chứng minh ba số a, b, c lập thành cấp số nhân, ta đi chứng minh:

$$ac = b^2.$$

Ví dụ 1: Cho ba số $\frac{2}{b-a}, \frac{1}{b}, \frac{2}{b-c}$ lập thành một cấp số cộng. Chứng minh rằng ba số a, b, c lập thành một cấp số nhân.

Giải

Từ giả thiết ba số $\frac{2}{b-a}, \frac{1}{b}, \frac{2}{b-c}$ lập thành một cấp số cộng, ta được:

$$\frac{2}{b-a} + \frac{2}{b-c} = \frac{2}{b} \Leftrightarrow b(b-c+b-a) = (b-a)(b-c) \Leftrightarrow b^2 = ac.$$

Vậy, ba số a, b, c lập thành một cấp số nhân.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho ba số dương a, b, c lập thành một cấp số nhân. Chứng minh rằng ba số $\sqrt[3]{abc}$, $\sqrt{ab+bc+ca}$, $a+b+c$ lập thành một cấp số nhân.

Bài tập 2. Cho ba số a, b, c thoả mãn $(a^2+b^2)(b^2+c^2) = (ab+bc)^2$. Chứng minh rằng a, b, c lập thành một cấp số nhân.

Bài toán 3: Tìm điều kiện của tham số để ba số lập thành một cấp số nhân.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để ba số a, b, c lập thành cấp số nhân, điều kiện là:

$ac = b^2$, bài toán được chuyển về việc giải phương trình.

Ví dụ 1: Tìm x để ba số $x-2$, $x-4$, $x+2$ lập thành một cấp số nhân.

Giải

Ba số $x-2$, $x-4$, $x+2$ lập thành một cấp số nhân, điều kiện là:

$$(x-4)^2 = (x-2)(x+2) \Leftrightarrow 8x = 20 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}.$$

Vậy, với $x = \frac{5}{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý: Một bài toán rất quen thuộc đối với phương trình bậc ba là:

" Tìm điều kiện của tham số sao cho phương trình:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \text{ với } a \neq 0 \qquad (1)$$

có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số nhân "

Ta thực hiện như sau:

Điều kiện cần: Giả sử phương trình có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số nhân, khi đó:

$$x_1x_3 = x_2^2,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a} \Leftrightarrow x_1x_2 + x_2x_3 + x_2^2 = \frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow x_2(x_1 + x_2 + x_3) = \frac{c}{a} \Leftrightarrow x_2 = -\frac{c}{b}.$$

Với $x_2 = -\frac{c}{b}$ thay vào (1) ta được:

$$a\left(-\frac{c}{b}\right)^3 + b\left(-\frac{c}{b}\right)^2 + c\left(-\frac{c}{b}\right) + d = 0 \Leftrightarrow ac^3 = b^3d. \qquad (2)$$

Đó chính là điều kiện cần để (1) có 3 nghiệm lập thành cấp số nhân.

Điều kiện đủ: Từ (2) suy ra phương trình có nghiệm $x_2 = -\frac{c}{b}$. Khi đó:

$$x_2(x_1 + x_2 + x_3) = \left(-\frac{c}{b}\right)\left(-\frac{b}{a}\right) = \frac{c}{a} = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$$

$\Leftrightarrow x_1x_3 = x_2^2 \Leftrightarrow x_1, x_2, x_3$ lập thành cấp số nhân.

Vậy, điều kiện cần và đủ để (1) có 3 nghiệm lập thành cấp số nhân là $ac^3 = b^3d$.

Với bài toán một tham số m, trong điều kiện đủ ta có thể khẳng định bằng việc chỉ ra nghiệm cụ thể của phương trình. Hãy nhớ điều này rất quan trọng bởi khi đó ta còn phải khẳng định phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.

Ví dụ 2: Xác định m để phương trình:

$$x^3 + 2x^2 + (m + 1)x + 2(m + 1) = 0 \qquad (1)$$

có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số nhân.

Giải

Điều kiện cần: Giả sử phương trình có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số nhân, khi đó:

$$x_1x_3 = x_2^2,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -2,$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = m + 1 \Leftrightarrow x_1x_2 + x_2x_3 + x_2^2 = m + 1$$

$$\Leftrightarrow x_2(x_1 + x_2 + x_3) = m + 1 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{m+1}{2}.$$

Với $x_2 = -\frac{m+1}{2}$ thay vào (1) ta được:

$$\left(-\frac{m+1}{2}\right)^3 + 2\left(-\frac{m+1}{2}\right)^2 + (m + 1)\left(-\frac{m+1}{2}\right) + 2(m + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (m + 1)(m^2 + 2m - 15) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 3 \\ m = -4 \end{array}\right..$$

Đó chính là điều kiện cần để (1) có 3 nghiệm lập thành cấp số nhân.

Điều kiện đủ: Ta lần lượt:

- Với m = − 1, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right. \text{ không thoả mãn.}$$

- Với m = 3, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x^2 + 4) = 0$$

$\Leftrightarrow x = -2$, không thoả mãn.

- Với m = − 5, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 4) = 0$$

$\Leftrightarrow x = 0$, không thoả mãn.

Vậy, không tồn tại m thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 3: Cho phương trình:

$$x^3 + ax + b = 0 \qquad (1)$$

Chứng minh rằng không tồn tại giá trị của a, b để phương trình có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số nhân.

Giải

Ta đi chứng minh bằng phản chứng. Giả sử trái lại (1) có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số nhân, khi đó:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = a \\ x_1x_2x_3 = b \\ x_2^2 = x_3x_1 \end{cases} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0, \text{ mâu thuẫn.}$$

Vậy, không tồn tại giá trị của a, b để phương trình có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số nhân.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tìm x để ba số x, $x - 4$, $2x + 2$ lập thành một cấp số nhân.

Bài tập 2. Giả sử các số $5x - y$, $2x + 3y$, $x + 2y$ lập thành một cấp số cộng, còn các số $(y + 1)^2$, $xy + 1$, $(x - 1)^2$ lập thành một cấp số nhân. Tìm x và y.

Bài tập 3. Tính x theo a, b, c để ba số $x + a$, $x + b$, $x + c$ lập thành một cấp số nhân.

Bài tập 4. Xác định m để phương trình:

$$x^3 - 3mx^2 + 4mx + m - 2 = 0$$

có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số nhân.

Bài toán 4: Tìm các phần tử của một cấp số nhân (u_n).

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Thông thường bài toán được chuyển về xác định u_1 và công bội q.

Ví dụ 1: Cho cấp số nhân (u_n) thoả mãn $u_4 - u_2 = 72$ và $u_5 - u_3 = 144$.

a. Tìm số hạng đầu tiên và công bội.

b. Tính tổng số của 10 số hạng đầu tiên.

c. Tính tổng $S' = u_3 + u_6 + ... + u_{12}$.

Giải

a. Gọi q là công bội của cấp số nhân (u_n), ta có:

$$\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q^3 - u_1.q = 72 \\ u_1.q^4 - u_1.q^2 = 144 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1.(q^3 - q) = 72 \\ u_1.(q^4 - q^2) = 144 \end{cases} \Rightarrow \frac{q^3 - q}{q^4 - q^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow q = 2 \Rightarrow u_1 = 12.$$

Vậy, cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 12$ và q = 2.

b. Ta có:

$$S_{20} = u_1 + u_2 + ... + u_{20} = u_1.\frac{q^{10} - 1}{q - 1} = 12.\frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 12276.$$

c. Ta có:

$$S' = u_3 + u_6 + ... + u_{12} = u_3.\frac{q^{10} - 1}{q - 1} = 12.2^2.\frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 49104.$$

Ví dụ 2: Cho ba số a, b, c lập thành một cấp số nhân. Chứng minh rằng:

$$(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2.$$

Áp dụng: Tìm ba số liên tiếp của một cấp số nhân biết tổng của chúng bằng 21 và tổng bình phương của chúng bằng 189.

Giải

Từ giả thiết ba số a, b, c lập thành một cấp số nhân, ta được:

$$ac = b^2.$$

Khi đó:

$$(a + b + c)(a - b + c) = (a + c)^2 - b^2 = a^2 + 2ac + c^2 - b^2$$
$$= a^2 + 2b^2 + c^2 - b^2 = a^2 + b^2 + c^2, \text{ đpcm.}$$

Áp dụng: Với ba số a, b, c thoả mãn điều kiện đầu bài ta được:

$$a + b + c = 21 \text{ và } a^2 + b^2 + c^2 = 189$$

Suy ra: $a - b + c = \dfrac{189}{21} = 9$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 6 \\ a + c = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 6 \\ a + c = 15 \\ a^2 + c^2 = 153 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \\ c = 12 \end{cases}.$$

Vậy, ba số cần tìm là 3, 6, 12.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho cấp số nhân (u_n) thoả mãn $u_3 = 15$ và $u_5 = 135$.

a. Tìm số hạng đầu tiên và công bội.

b. Tính tổng số của 20 số hạng đầu tiên.

Bài tập 2. Cho cấp số nhân (u_n) thoả mãn $u_4 - u_2 = 12$ và $u_5 - u_3 = 24$.

a. Tìm số hạng đầu tiên và công bội.

b. Tính tổng số của 10 số hạng đầu tiên.

c. Tính tổng $S' = u_3 + u_6 + ... + u_{12}$.

Bài tập 3. Cho cấp số nhân (u_n) thoả mãn $u_1 + u_6 = 244$ và $u_5 + u_4 = 36$.

a. Tìm số hạng đầu tiên và công bội.

b. Tính tổng số của 11 số hạng đầu tiên.

Bài tập 4. Cho cấp số nhân (u_n) thoả mãn $u_2 + u_4 = 10$ và $u_1 + u_3 + u_5 = -21$. Tìm số hạng đầu tiên và công bội.

Bài tập 5. Cho ba số khác nhau lập thành một cấp số cộng, bình phương của các số ấy lập thành một cấp số nhân. Tìm ba số đó.

Bài toán 5: Tính tổng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Thông thường bài toán được chuyển về tính tổng của một cấp số nhân.

Ví dụ 1: Tính tổng sau:

$$S = 2 + 6 + 18 + ... + 13122.$$

Giải

Xét cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 2$ và công bội $q = 3$, ta được:

$$13122 = u_n = u_1.q^{n-1} = 2.3^{n-1} \Leftrightarrow n = 9$$

$$S = S_9 = u_1.\frac{q^9 - 1}{q - 1} = 2.\frac{3^9 - 1}{3 - 1} = 19682.$$

Ví dụ 2: Tính tổng sau:

$$S = 1 + 2.2 + 3.2^2 + \dots + 100.2^{99}. \qquad (1)$$

Giải

Ta có ngay:

$$2S = 1.2 + 2.2^2 + 3.2^3 + \dots + 100.2^{100}. \qquad (2)$$

Lấy (2) trừ (1), ta được:

$$S = 100.2^{100} - (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{99})$$

$$= 100.2^{100} - \frac{2^{99} - 1}{2 - 1} = 99.2^{100} + 1.$$

Ví dụ 3: Tính tổng sau:

$$S = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{11\dots1}_{\text{n chữ số}}.$$

Giải

Xét hai dãy số:

- Cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 1$ và công bội $q = 10$.
- Dãy số $(s_n) = \{1, 11, 111, \dots, \underbrace{11\dots1}_{\text{n chữ số}}\}$.

Suy ra s_n là tổng n số hạng đầu của cấp số nhân (u_n), tức là:

$$s_n = \frac{10^n - 1}{10 - 1} = \frac{1}{9}(10^n - 1).$$

Khi đó, ta nhận được:

$$S = s_1 + s_2 + \dots + s_n = \sum_{k=1}^{n} s_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{9}(10^k - 1) = \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n} 10^k - \frac{n}{9}$$

$$= \frac{1}{9}.10.\frac{10^n - 1}{10 - 1} - \frac{n}{9} = \frac{1}{81}(10^{n+1} - 10 - 9n).$$

Ví dụ 4: Tính tổng sau:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$$

Giải

Xét cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 1$ và công bội $q = \frac{1}{2} < 1$, ta được:

$$S = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Ví dụ 5: Cho:

$$S = 1 + q + q^2 + \dots, \text{ với } |q| < 1,$$

$$T = 1 + Q + Q^2 + \dots, \text{ với } |Q| < 1,$$

$$A = 1 + qQ + q^2Q^2 + \dots$$

Tính A theo S và T.

Giải

Với giả thiết $|q| < 1$, $|Q| < 1$ suy ra $|qQ| < 1$.

Khi đó:

$$S = \frac{1}{1-q} \Rightarrow q = \frac{S-1}{S},$$

$$T = \frac{1}{1-Q} \Rightarrow Q = \frac{T-1}{T},$$

$$A = \frac{1}{1-qQ} = \frac{1}{1-\frac{S-1}{S}.\frac{T-1}{T}} = \frac{ST}{S+T-1}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tính các tổng sau:

a. $S = 1 + 4 + 16 + \dots + 65536$.

b. $S = 3 - 15 + 75 - \dots + 234375$.

Bài tập 2. Tính tổng sau:

a. $S = 1 + 4.2 + 7.2^2 + 10.2^3 + \dots + 288.2^{99}$.

b. $S = 1 + 2.3 + 3.3^2 + \dots + 100.3^{99}$.

Bài tập 3. Tính tổng sau:

$$S = 6 + 66 + 666 + \dots + \underbrace{66\dots6}_{n \text{ chữ số}}.$$

Bài tập 4. Tính tổng sau:

$$S = \left(3 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(3^2 + \frac{1}{3^2}\right)^2 + \dots + \left(3^n + \frac{1}{3^n}\right)^2.$$

CHƯƠNG II

GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

CHỦ ĐỀ 1

ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁC ĐỊNH LÍ VỀ GIỚI HẠN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa 1: *Cho hàm số* $y = f(x)$ *xác định trên một khoảng* K, *có thể trừ ở một điểm* $x_0 \in K$.

Số l *được gọi là giới hạn của hàm số* $f(x)$ *khi* x *tiến tới* x_0 *khi với mọi số dương* ε *tuỳ ý tồn tại một số dương* δ *sao cho* $|x - x_0| < \delta$ *thì* $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Như vậy:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \left|x - x_0\right| < \delta \text{ ta có } \left|f(x) - l\right| < \varepsilon.$$

Định nghĩa 2: (*Định nghĩa giới hạn của hàm số bằng giới hạn của dãy số*) :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \text{Với mọi dãy } \{x_n\} \to x_0 \text{ ta có } f(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} l.$$

2. CÁC ĐỊNH LÍ VỀ GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

Định lí 1: (*Tính duy nhất của giới hạn*): *Nếu một hàm số có giới hạn thì giới hạn đó là duy nhất.*

Định lí 2: (*Các phép toán trên các giới hạn của hàm số*): *Nếu hai hàm số* $f(x)$ *và* $g(x)$ *có giới hạn khi* $x \to x_0$ *thì ta có:*

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x).g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x). \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}, \text{ với } \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0.$$

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \to x_0} f(x)}, \text{ với } f(x) \geq 0.$$

Định lí 3: (*Nguyên lí kẹp giữa*): *Cho ba hàm số* $f(x)$, $g(x)$ *và* $h(x)$ *sao cho*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \text{ và } \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L \text{ thì } \lim_{x \to x_0} g(x) = L.$$

3. GIỚI HẠN CƠ BẢN

Ta có:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$, với C là hằng số.
2. Nếu hàm số f(x) xác định tại điểm x_0 thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

4. GIỚI HẠN MỘT PHÍA

***Định nghĩa 3**: Ta có:*

a. ***Giới hạn trái**:*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : -\delta < x - x_0 < 0 \text{ thì } |f(x) - a| < \varepsilon.$$

b. ***Giới hạn phải:***

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < x - x_0 < \delta \text{ thì } |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Định lí 4: Điều kiện cần và đủ để $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ là $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a$.

5. GIỚI HẠN Ở VÔ CỰC

***Định nghĩa 4**: Ta có:*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 : |x| > A \text{ ta có } |f(x) - a| < \varepsilon.$$

***Định nghĩa 5**: Ta có:*

a. ***Giới hạn trái ở vô cực**:*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M < 0 : x < M \text{ ta có } |f(x) - a| < \varepsilon.$$

b. ***Giới hạn phải ở vô cực**:*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 : x > M \text{ ta có } |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Định lí 5: Điều kiện cần và đủ để $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$ là $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$.

Định lí 6: *(Nguyên lí kẹp giữa): Cho ba hàm số f(x), g(x) và h(x) sao cho*

$f(x) \le g(x) \le h(x)$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = L$ thì $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = L$.

6. GIỚI HẠN VÔ CỰC

***Định nghĩa 6**: Ta có:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall c > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \text{ ta có } |f(x)| > c.$$

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Sử dụng định nghĩa chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Với $\forall \varepsilon > 0$, xuất phát từ bất đẳng thức:

$$|f(x) - a| < \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| < g(\varepsilon).$$

Bước 2: Đặt $\delta = g(\varepsilon)$.

Bước 3: Vậy: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = g(\varepsilon) > 0 : |x - x_0| < \delta$ ta có $|f(x) - a| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x) = 2x + 1$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$.

Giải

Với $\forall \varepsilon > 0$ xét bất đẳng thức:

$$|f(x) - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow |2x + 1 - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow 2|x - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Đặt $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Vậy $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \dfrac{\varepsilon}{2} > 0 : |x - 1| < \delta$ ta có:

$$|f(x) - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 3, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng với mọi $x_0 > 0$, ta luôn có $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$.

Giải

Ta có: $\sqrt{x} - \sqrt{x_0} = \dfrac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \dfrac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \dfrac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}}$.

Như vậy, với số $\varepsilon > 0$, để có $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon$, ta chọn x sao cho:

$$\frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \varepsilon \Leftrightarrow |x - x_0| < \varepsilon\sqrt{x_0}.$$

Vậy $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon\sqrt{x_0} : |x - x_0| < \delta$, ta có :

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Dùng định nghĩa chứng minh rằng:

a. $\lim\limits_{x \to 1} (3x - 1) = 3.$ b. $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 2x - 4) = 4.$

Bài tập 2. Dùng định nghĩa chứng minh rằng:

a. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x+1}{x+2} = 1$. b. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 - 2x + 8}{x+1} = 8$.

Bài tập 3. Dùng định nghĩa chứng minh rằng:

a. $\lim\limits_{x \to x_0} kx = kx_0$. c. $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$.

b. $\lim\limits_{x \to x_0} (ax + b) = ax_0 + b$. d. $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$.

Bài tập 4. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |a|$.

Bài toán 2: Sử dụng định nghĩa chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Với $\forall\varepsilon > 0$, xuất phát từ bất đẳng thức:

$$|f(x) - a| < \varepsilon \Rightarrow |x| > g(\varepsilon).$$

Bước 2: Đặt $A = g(\varepsilon)$.

Bước 3: Vậy: $\forall\varepsilon > 0, \exists A = g(\varepsilon) > 0$: $|x| > A$ ta có $|f(x) - a| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to \infty} f(x) = a.$$

Ví dụ 1: Cho $f(x) = \frac{1}{x}$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Giải

Với $\forall\varepsilon > 0$ xét bất đẳng thức:

$$|f(x) - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Đặt $A = \frac{1}{\varepsilon}$.

Vậy $\forall\varepsilon > 0, \exists A = \frac{1}{\varepsilon} > 0 : |x| > A$ ta có:

$$|f(x) - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0, \text{ đpcm.}$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Dùng định nghĩa chứng minh rằng:

a. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x+1} = 0$. b. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x-1}{x-1} = 2$.

Bài tập 2. Dùng định nghĩa chứng minh rằng:

a. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$. b. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2+1} = 3$.

Bài toán 3: Sử dụng định nghĩa chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Với $\forall \varepsilon > 0$, xuất phát từ bất đẳng thức:

$$|f(x)| > c \Rightarrow |x - x_0| < g(c).$$

Bước 2: Đặt $\delta = g(\varepsilon)$.

Bước 3: Vậy:

$$\forall c > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \text{ ta có } |f(x)| > c$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$.

Giải

Với mọi $c > 0$ tuỳ ý, xét :

$$|f(x)| > c \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x-1}\right| > c \Leftrightarrow |x - 1| < \frac{1}{c}.$$

Đặt $\delta = \dfrac{1}{c}$.

Vậy $\forall c > 0, \exists \delta = \dfrac{1}{c} > 0 : |x - 1| < \delta$ ta có:

$$|f(x)| > c \Leftrightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = \infty, \text{ đpcm.}$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Dùng định nghĩa chứng minh rằng:

a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$.

b. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x}{x-2} = \infty$.

Bài tập 2. Dùng định nghĩa chứng minh rằng:

a. $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{\sqrt{x-3}} = +\infty$.

b. $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$.

Bài toán 4: Chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ không tồn tại.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chọn hai dãy số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ với

- $x_n \to x_0$ khi $n \to \infty$, khi đó đánh giá $f(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} L_1$.
- $y_n \to x_0$ khi $n \to \infty$, khi đó đánh giá $f(y_n) \xrightarrow{n \to \infty} L_2$.

Bước 2: Nhận xét rằng $L_1 \neq L_2$.

Bước 3: Vậy, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ không tồn tại.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to \infty} \cos x$ không tồn tại.

Giải

Đặt $f(x) = \cos x$.

Chọn hai dãy số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ với :

- $x_n = 2n\pi \Rightarrow x_n \to \infty$ khi $n \to \infty$ và ta được :

$$f(x_n) = \cos(x_n) = \cos(2n\pi) \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

- $y_n = \frac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow y_n \to \infty$ khi $n \to \infty$ và ta được :

$$f(y_n) = \cos(y_n) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Vậy, $\lim\limits_{x \to \infty} \cos x$ không tồn tại.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}$ không tồn tại.

Bài tập 2. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to 0} \cos\frac{1}{x}$ không tồn tại.

Bài tập 3. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to \infty} \sin 2x$ không tồn tại.

Bài tập 4. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to 1} \sin\frac{1}{x-1}$ không tồn tại.

Bài toán 5: Giới hạn của hàm số kép.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \text{ khi } x < x_0 \\ f_2(x) \text{ khi } x \geq x_0 \end{cases}.$$

Để tính giới hạn hoặc xác định giá trị của tham số để hàm số có giới hạn khi $x \to x_0$, ta thực hiện theo các bước sau :

Bước 1: Tính giới hạn các giới hạn:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f_1(x) = L_1.$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f_2(x) = L_2.$$

Bước 2: Khi đó :

- Nếu $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = L.$
- Để hàm số có giới hạn khi $x \to x_0$ điều kiện là :

  $L_1 = L_2 \Rightarrow$ Giá trị của *tham số*.

Ví dụ 1: Cho hàm số :

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 \text{ khi } x < 0 \\ x^2 + 1 \text{ khi } x \geq 0 \end{cases}.$$

Tính các giới hạn $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ và $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

Giải

Ta có :

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x + 1) = 1,$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2 + 1) = 1.$$

Vậy :

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 1.$$

Ví dụ 2: Cho hàm số : $f(x) = \begin{cases} x + a \text{ khi } x < 0 \\ x^2 + 1 \text{ khi } x \geq 0 \end{cases}.$

Tìm a để hàm số có giới hạn khi $x \to 0$.

Giải

Ta có :

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x + a) = a \text{ và } \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2 + 1) = 1.$$

Hàm số có giới hạn khi $x \to 0$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) \Leftrightarrow a = 1.$$

Vậy với $a = 1$ ta có $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho hàm số : $f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ khi } x < 0 \\ x^2 \quad \text{ khi } x \geq 0 \end{cases}.$

Tính các giới hạn $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

Bài tập 2. Cho hàm số : $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$.

Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

Bài tập 3. Cho hàm số : $f(x) = \begin{cases} x + 3a \text{ khi } x < 0 \\ x^2 + a + 2 \text{ khi } x \geq 0 \end{cases}$.

Tìm a để hàm số có giới hạn khi $x \to 0$.

Bài tập 4. Cho hàm số : $f(x) = \begin{cases} x + 3a & \text{khi } x < -1 \\ x^2 + x + a + 3 & \text{khi } x \geq -1 \end{cases}$.

Tìm a để hàm số có giới hạn khi $x \to -1$.

Bài toán 6: Sử dụng nguyên lí kẹp giữa tìm giới hạn của hàm số.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Giả sử cần tính giới hạn của hàm số $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ (hoặc $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$), ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chọn hai hàm số g(x), h(x) thoả mãn:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x).$$

Bước 2: Khẳng định:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L \text{ (hoặc } \lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} h(x) = L.\text{)}.$$

Bước 3: Kết luận:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L \text{ (hoặc } \lim_{x \to \infty} f(x) = L\text{)}.$$

Ví dụ 1: Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$.

Giải

Với mọi $x \neq 0$ thuộc lân cận của điểm 0 luôn có:

$$\left|x\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq x\sin\frac{1}{x} \leq |x|,$$

$$\lim_{x \to 0}(-|x|) = \lim_{x \to 0}|x| = 0.$$

Vậy, ta được :

$$\lim_{x \to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0.$$

Ví dụ 2: (HVCNBCVT - 99): Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

Giải

Với mọi x ≠ 0 thuộc lân cận của điểm 0 luôn có:

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \le \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{|x|}, \text{ với } \forall x \ne 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{|x|} = 0.$$

Vậy, ta được : $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x} = 0$

và khi đó : $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1+\dfrac{\sin x}{x}} = 1.$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tính các giới hạn:

a. $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\dfrac{1}{x}$. b. $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\dfrac{1}{x}$.

Bài tập 2. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\cos x}{x+\cos x}$.

Bài toán 7: Dùng các định lí về giới hạn và gới hạn cơ bản để tìm giới hạn.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng kết quả của định lí 2 và các giới hạn cơ bản sau:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$, với C là hằng số.
2. Nếu hàm số f(x) xác định tại điểm x_0 thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^n} = 0$, với n > 0.

Ví dụ 1: Tính giới hạn:

$$\lim_{x\to 3}(x^2+3x+4).$$

Giải

Ta có :

$$\lim_{x\to 3}(x^2+3x+4) = 3^2 + 3.3 + 4 = 22.$$

Ví dụ 2: Tính giới hạn:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}.$$

Giải

Ta có :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2.$$

Ví dụ 3: Tính giới hạn: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x + 8} - 3}{x^2 + 2x - 3}$.

Giải

Ta có : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x + 8} - 3}{x^2 + 2x - 3} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{(\sqrt{x + 8} + 3)(x - 1)(x + 3)}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{(\sqrt{x + 8} + 3)(x + 3)} = \frac{1}{24}.$$

Ví dụ 4: Tính giới hạn: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - x - 1}$.

Giải

Chia cả tử và mẫu cho x^2, ta được :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - x - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = 1.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to 1} (2x + 4)$.

b. $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 + 4x + 3)$.

c. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x - 1}$.

Bài tập 2. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{x^2 - 4}$.

b. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$.

c. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 9}$.

d. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 6x + 5}{x^3 + 2x^2 - 1}$

Bài tập 3. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 3x + 2}$.

b. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x + 2} - 2}{\sqrt{2x} - 2}$.

Bài tập 4. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x + 1}{x - 1}$.

b. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x + 1}{x^2 - 1}$.

CHỦ ĐỀ 2

CÁC DẠNG VÔ ĐỊNH

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Khi tìm giới hạn của một hàm số, chúng ta có thể gặp các trường hợp sau:

1. $\lim\frac{u(x)}{v(x)}$ với $u(x) \to 0$ và $v(x) \to 0$.
2. $\lim\frac{u(x)}{v(x)}$ với $u(x) \to \infty$ và $v(x) \to \infty$.
3. $\lim[u(x) - v(x)]$ với $u(x) \to \infty$ và $v(x) \to \infty$.
4. $\lim[u(x).v(x)]$ với $u(x) \to 0$ và $v(x) \to \infty$.

Ta gọi là các dạng vô định dạng $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0.\infty$, | |

II. PHƯƠNG PHÁP TÍNH CÁC DẠNG VÔ ĐỊNH

Bài toán 1. Tính giới hạn dạng $\frac{0}{0}$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Bản chất của việc khử dạng không xác định $\frac{0}{0}$ là làm xuất hiện nhân tử chung để :

- Hoặc là khử nhân tử chung để đưa về dạng xác định.
- Hoặc đưa giới hạn về dạng giới hạn cơ bản, quen thuộc đã biết rõ kết quả hoặc cách giải.

Ghi chú:

- Nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm x_0 thì $f(x) = (x - x_0).g(x)$.
- Liên hợp của biểu thức:

$\sqrt{a} - b$ là $\sqrt{a} + b$.

$\sqrt{a} - \sqrt{b}$ là $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

$\sqrt[3]{a} - b$ là $\sqrt[3]{a^2} + b\sqrt[3]{a} + b^2$.

$\sqrt[3]{a} + b$ là $\sqrt[3]{a^2} - b\sqrt[3]{a} + b^2$.

Ví dụ 1: Tính giới hạn:

$$\lim_{x\to1}\frac{3x^2-4x+1}{x-1}.$$

Giải

Phân tích để khử dạng $\frac{0}{0}$. Ta có:

$$\lim_{x\to1}\frac{3x^2-4x+1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(3x-1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(3x-1)=2.$$

Ví dụ 2: Tính giới hạn:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\sin2x-\cos2x}{1+\sin2x-\cos2x}.$$

Giải

Ta có:

$$\frac{1-\sin2x-\cos2x}{1+\sin2x-\cos2x}=\frac{(1-\cos2x)-\sin2x}{(1-\cos2x)+\sin2x}=\frac{2\sin^2x-2\sin x.\cos x}{2\sin^2x+2\sin x.\cos x}$$

$$=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}.$$

Do đó :

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\sin2x-\cos2x}{1+\sin2x-\cos2x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}=-1.$$

Ví dụ 3: Tính các giới hạn:

a. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{3-\sqrt{2x+9}}$. b. $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}}$.

Giải

a. Ta có:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{3-\sqrt{2x+9}}=\lim_{x\to0}\frac{x(3+\sqrt{2x+9})}{-2x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3+\sqrt{2x+9}}{-2(\sqrt{x+1}+1)}=-\frac{3}{2}.$$

b. Ta có:

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}}=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x})(2-x)}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x})(2x-4)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}}{-2(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x})}=-\frac{1}{4}.$$

Ví dụ 4: Tính giới hạn:

a. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$, với a > 0. b. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}+x^3-3x}$.

Giải

a. Ta có :

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} = \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}} + \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{x-a}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})\sqrt{x^2-a^2}} + \lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x+a}}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-a}}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})\sqrt{x+a}} + \frac{1}{\sqrt{2a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

b. Ta có :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}+x^3-3x} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}+\dfrac{x^3-3x+2}{x-1}}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1}{\dfrac{x^2-1}{(\sqrt{x^2+3}+2)(x-1)}+x-2}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1}{\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}+x-2} = -2.$$

Ví dụ 5: Tính giới hạn:

a. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{x-2}$. b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}$.

Giải

a. Ta có:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{4x}-2}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{4x-8}{[(\sqrt[3]{4x})^2+\sqrt[3]{4x}+4](x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{4}{(\sqrt[3]{4x})^2+2\sqrt[3]{4x}+4} = \frac{1}{3}.$$

b. Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to 0}\frac{2x(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1})}{x[\sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)(x+1)}+\sqrt[3]{(x+1)^2}]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1})}{\sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)(x+1)}+\sqrt[3]{(x+1)^2}}=\frac{4}{3}.$$

Ví dụ 6: Tính giới hạn:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1}{\sqrt[3]{x-2}+x^2-x+1}.$$

Giải

Ta có :

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1}{\sqrt[3]{x-2}+x^2-x+1} = \lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1}{x-1}}{\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+x^2-x+1}{x-1}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}+\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}}{\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+1}{x-1}+\dfrac{x^2-x}{x-1}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{2x-2}{(\sqrt{2x-1}+1)(x-1)}+x-2}{\dfrac{x-1}{[\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{x-2}+1](x-1)}+x}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{2}{\sqrt{2x-1}+1}+x-2}{\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{x-2}+1}+x}=0.$$

Ví dụ 7: Tính giới hạn:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{5x+1}-1}{x}.$$

Giải

Đặt $t=\sqrt[5]{5x+1}$, ta được :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{5x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{t-1}{\dfrac{t^5-1}{5}}=\lim_{x\to 0}\frac{5}{t^4+t^3+t^2+t+1}=1.$$

Ví dụ 8: Tính giới hạn :

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}.$$

Giải

Ta có :

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{1+x}-2+2-\sqrt[3]{8-x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{2(\sqrt{1+x}-1)}{x}+\frac{2-\sqrt[3]{8-x}}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+1)}+\frac{x}{x[4+2\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2}]}\right\}=\frac{13}{12}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tính các giới hạn sau :

a. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+3x+1}{-x^2+4x+5}$.

b. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+x^2-2x-8}{x^2-3x+2}$.

Bài tập 2. Tính các giới hạn sau :

a. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+...+x^n-n}{x-1}$.

b. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-nx+(n-1)}{(x-1)^2}$.

Bài tập 3. Tính các giới hạn sau :

a. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$.

b. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$.

Bài tập 4. Tính các giới hạn sau :

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{3-\sqrt{2x+9}}$.

b. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}}{x-1}$.

c. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-\sqrt{3x-2}}{x-1}$.

d. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-5}}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+6}}$.

Bài tập 5. Tính các giới hạn sau :

a. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}}$.

b. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}+x^4-3x^3+x^2+3}{\sqrt{2x}-2}$.

Bài tập 6. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x-2}+1}$.

b. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+x^2+x+1}{x+1}$.

Bài tập 7. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{2x-1}-1}{x-1}$. b. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[4]{4x-3}-1}{x-1}$.

c. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[4]{2x-1}+\sqrt[5]{x-2}}{x-1}$. d. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$.

Bài tập 8. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x^2+2004)\sqrt[7]{1-2x}-2004}{x}$.

b. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{1+x}.\sqrt[3]{1+\dfrac{x}{2}}.\sqrt[4]{1+\dfrac{x}{3}}-\sqrt[4]{1-x}}{\dfrac{3}{2}\sqrt{4+x}-\sqrt[3]{8-x}-\sqrt[4]{1+x}}$.

Bài toán 2. Tính giới hạn dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta chia cả tử và mẫu cho luỹ thừa bậc cao nhất của x có mặt ở phân thức đó.

Ví dụ 1: Tính các giới hạn:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(1-x)(1+x)^2(3+x)^2}{(2-x)(3-x)^2(4-x)^2}.$$

Giải

Chia cả tử và mẫu cho x^6, ta được :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(1-x)(1+x)^2(3+x)^2}{(2-x)(3-x)^2(4-x)^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{x}+1\right)^2\left(\frac{3}{x}+1\right)^2}{\left(\frac{2}{x}-1\right)\left(\frac{3}{x}-1\right)^2\left(\frac{4}{x}-1\right)^2} = 1.$$

Tổng quát: Giả sử $R(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0}$, với $a_n \neq 0$ và $b_m \neq 0$.

Ta có:

$$\lim_{x \to \infty} R(x) = \begin{cases} \infty & \text{khi } n > m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{khi } n = m \\ 0 & \text{khi } n < m \end{cases}.$$

Ví dụ 2: Tính giới hạn :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}.$$

Giải

Chia cả tử và mẫu cho x, với lưu ý :

$$\frac{\sqrt{x^2+2}}{x} = \begin{cases} \sqrt{1+\frac{2}{x^2}} & \text{khi } x > 0 \\ -\sqrt{1+\frac{2}{x^2}} & \text{khi } x < 0 \end{cases}.$$

Do đó ta xét hai trường hợp :

- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} = 1.$$
- $$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{-\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} = -1.$$

Vậy :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}} \neq \lim_{x\to-\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}$$

suy ra $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}$ không tồn tại.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tính giới hạn sau:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x(x^2+1)(x^3+2)}{x^6}.$$

Bài tập 2. Tính giới hạn sau:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)(x^2+2)(2x+3)^3}{x^3(x+1)(2x-1)^2}.$$

Bài tập 3. Tính các giới hạn sau :

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$. b. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x+1}{\sqrt{1-x+4x^2}-x}$.

Bài tập 4. Tính các giới hạn sau :

a. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$. b. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+a}}$, với $a > 0$.

Bài toán 3. Giới hạn dạng $\infty - \infty$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng các phương pháp đã biết để tính giới hạn dạng $\frac{\infty}{\infty}$ chúng ta tính được giới hạn dạng $\infty - \infty$ thông qua phép nhân liên hợp.

Ví dụ 1: Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x)$. b. $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x - 1)$.

Giải

a. Ta có :

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

b. Ta có :

$$\lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x - 1) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 1 - (x - 1)^2}{\sqrt{x^2 + 1} - x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1} - x + 1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1 + \frac{1}{x}} = -1.$$

Ví dụ 2: Cho hàm số :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4} - \sqrt{x^2 - 2x + 4}.$$

Tính các giới hạn $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, từ đó nhận xét về sự tồn tại của giới hạn $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

Giải

Ta có :

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 4} - \sqrt{x^2 - 2x + 4})$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} + \sqrt{x^2 - 2x + 4}} = -2.$$

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 4} - \sqrt{x^2 - 2x + 4})$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} + \sqrt{x^2 - 2x + 4}} = 2.$$

Vậy :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \neq \lim_{x\to-\infty} f(x),$$

suy ra $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ không tồn tại.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tính các giới hạn sau :

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{4x^2 - x} - 2x)$.

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x)$.

Bài tập 2: Cho hàm số :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}.$$

Tính các giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, từ đó nhận xét về sự tồn tại của giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Bài toán 4. Giới hạn của hàm số lượng giác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta có kết quả:

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Ví dụ 1: Tính các giới hạn :

a. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin 3x}{2x}$.

b. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{tg}x}{x}$.

Giải

a. Ta có :

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin 3x}{2x} = \lim_{x\to0} \frac{\sin 3x}{3x.\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\lim_{x\to0} \frac{\sin 3x}{3x} = \frac{3}{2}.$$

b. Ta có :

$$\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{tg}x}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x}.\frac{1}{\cos x} = 1.$$

Chú ý : Từ đây chúng ta có kết quả :

$$\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{tg}x}{x} = 1 \text{ và } \lim_{x\to0} \frac{\operatorname{tg}(kx)}{kx} = 1.$$

Ví dụ 2: Tính giới hạn:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 3x.\cos 5x}{x^2}.$$

Giải

Ta có :

$$\cos4x-\cos3x.\cos5x = \cos4x-\frac{1}{2}(\cos8x+\cos2x)$$

$$=\frac{1}{2}(2\cos4x-\cos8x-\cos2x)$$

$$=\frac{1}{2}[(1-\cos8x)+(1-\cos2x)-2(1-\cos4x)]$$

$$=\sin^2 4x+\sin^2 x-2\sin^2 2x$$

Do đó :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 3x\cos 5x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 4x+\sin^2 x-2\sin^2 2x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 4x}{x^2}+\frac{\sin^2 x}{x^2}-\frac{2\sin^2 2x}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{16\sin^2 4x}{(4x)^2}+\frac{\sin^2 x}{x^2}-\frac{8\sin^2 2x}{(2x)^2}\right]$$

$$=16+1-8=9.$$

Ví dụ 3: Tính giới hạn:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$. b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

Giải

a. Ta có :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}(1+\sqrt{\cos x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot\frac{\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}\cdot\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}\right]$$

$$=0.$$

b. Ta có :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3(\sqrt{1+\operatorname{tg}x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x(1-\cos x)}{x^3(\sqrt{1+\operatorname{tg}x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{tg}x.\sin^2\frac{x}{2}}{x^3(\sqrt{1+\operatorname{tg}x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{tg}x}{x}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2.4}.\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}+\sqrt{1+\sin x}}\right]=\frac{1}{4}.$$

Ví dụ 4: Tính giới hạn:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\cos x}{x^2}.$$

Giải

Cách 1 : Ta có :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-\cos^2 x}{\left(\sqrt{1+x^2}+\cos x\right)x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\sin^2 x}{\left(\sqrt{1+x^2}+\cos x\right)x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+\cos x}.\left(1+\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)$$

$$=1.$$

Cách 2 : Ta có :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}+\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}+\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right]=1.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+\operatorname{tg}3x}{x}$. b. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\operatorname{tg}2x}$.

Bài tập 2. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{x\sin x}$.

b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{tg}x-\sin x}{x^3}$.

c. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-2}{\sin(x-1)}$.

d. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin^2\dfrac{x}{2}}$.

e. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2x}{\text{tg}(x-1)}$.

Bài tập 3. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos ax-\cos bx}{x^2}$.

b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax+\text{tg}bx}{(a+b)x}$.

Bài tập 4. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7(\pi-x)}{4(\pi-x^2)}$.

b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x}{x^2}$.

c. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x+\text{tg}^2x}{x\sin x}$.

d. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{98}{83}\left(\dfrac{1-\cos 3x\cos 5x\cos 7x}{\sin^2 7x}\right)$.

Bài tập 5. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\sin x-\text{tg}x}{x^2\sin x}$.

b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos ax-\cos bx\cos cx}{x^2}$.

c. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\text{tg}x}\right)$.

d. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\ldots\cos nx}{x^2}$.

Bài tập 6. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin^2 x}-\cos x}{\sin^2 x}$.

b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^4 x-\sin^4 x-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$.

Bài toán 5. Giới hạn dạng 1^∞, $0.\infty$, ∞^0.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Đối với dạng 1^∞ cần nhớ các giới hạn cơ bản sau :

a. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

b. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

Việc áp dụng chúng để tìm giới hạn của hàm số trong nhiều trường hợp cần thực hiện các phép biến đổi phù hợp.

2. Đối với dạng $0.\infty$ và ∞^0, ta chọn một trong hai cách sau :

Cách 1 : Sử dụng phương pháp biến đổi để tận dụng các dạng giới hạn cơ bản.

Cách 2 : Sử dụng nguyên lí kẹp giữa, với các bước :

Bước 1: Chọn hai hàm số g(x), h(x) thoả mãn :

$$g(x) \le f(x) \le h(x).$$

Bước 2: Khẳng định

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L$$

$$\text{(hoặc } \lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} h(x) = L\text{).}$$

Bước 3: Vậy :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \text{ (hoặc } \lim_{x\to\infty} f(x) = L\text{).}$$

Ví dụ 1: Tính giới hạn :

$$\lim_{x\to 0} (1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}.$$

Giải

Ta có :

$$(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}} = (1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}.\frac{\sin 2x}{x}} = (1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}.\frac{\sin 2x}{2x}.2}.$$

Do đó :

$$\lim_{x\to 0} (1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} (1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}.\frac{\sin 2x}{2x}.2} = e^2.$$

Ví dụ 2: Tính giới hạn :

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x+5}{3x-1}\right)^{2x}.$$

Giải

Ta có :

$$\left(\frac{3x+5}{3x-1}\right)^{2x} = \left(1+\frac{6}{3x-1}\right)^{2x},$$

đặt $\frac{1}{t} = \frac{6}{3x-1} \Leftrightarrow x = \frac{6t+1}{3}$.

Nhận xét khi $x \to \infty$ thì $t \to \infty$.

Vậy :

$$\left(\frac{3x+5}{3x-1}\right)^{2x} = \left(1+\frac{1}{t}\right)^{2\frac{6t+1}{3}} = \left(1+\frac{1}{t}\right)^{t\frac{2(6t+1)}{3t}}.$$

Do đó :

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x+5}{3x-1}\right)^{2x} = \lim_{t\to\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^{t\frac{2(6t+1)}{3t}} = e^4.$$

Chú ý: Với hàm số $f(x) = u(x)^{v(x)}$, $u(x) > 0$ ở lân cận x_0, giả sử cần xác định

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

trong trường hợp giới hạn có dạng vô định, ta chọn một trong hai cách sau :

Cách 1 : Sử dụng phương pháp biến đổi để tận dụng các dạng giới hạn cơ bản của 1^{∞}.

Cách 2 : Xét :

$$\lim_{x \to x_0} [\ln f(x)] = \lim_{x \to x_0} [v(x).\ln u(x)] = A \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = e^A.$$

Ví dụ 3: Tính giới hạn :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\text{tg}x}.$$

Giải

Cách 1 : Ta biến đổi :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\text{tg}x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin^2 x)^{\frac{\text{tg}x}{2}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x)^{\frac{1}{\cos^2 x}.\sin x.\cos x}$$

$$= e^0 = 1.$$

Cách 2 : Xét :

$$A = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} [\ln(\sin x)^{\text{tg}x}] = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} [\text{tg}x.\ln(\sin x)].$$

Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - t$.

Nhận xét, khi $x \to \frac{\pi}{2}$ thì $t \to 0$.

Vậy :

$$A = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} [\text{tg}x.\ln(\sin x)] = \lim_{t \to 0} \left\{\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - t\right).\ln\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right]\right\}$$

$$= \lim_{t \to 0} [\text{cotg}t.\ln(\cos t)] = \lim_{t \to 0} \left\{\frac{\cos t}{\sin t}.\ln[1 + (\cos t - 1)]\right\}$$

$$= \lim_{t \to 0} \left\{\cos t.\frac{t}{\sin t}.\frac{\ln[1 + (\cos t - 1)]}{\cos t - 1}.\frac{\cos t - 1}{t}\right\}$$

$$= \lim_{t \to 0} \left\{\cos t.\frac{t}{\sin t}.\frac{\ln[1 + (\cos t - 1)]}{\cos t - 1}.\frac{\sin\frac{t}{2}}{t}\left(-2\sin\frac{t}{2}\right)\right\} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = e^0 = 1.$$

Ví dụ 4: Tính giới hạn :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[\left(\frac{\pi}{2} - x\right).\operatorname{tg} x\right].$$

Giải

Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - t$.

Nhận xét khi $x \to \frac{\pi}{2}$ thì $t \to 0$.

Vậy :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[\left(\frac{\pi}{2} - x\right).\operatorname{tg} x\right] = \lim_{t \to 0} \left[t.\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right] = \lim_{t \to 0} [t.\operatorname{cotg} t]$$

$$= \lim_{t \to 0} \left(t.\frac{\cos t}{\sin t}\right) = 1.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tính các giới hạn :

a. $\lim_{x \to 0} (1 + \sin 3x)^{\frac{1}{x}}$.

b. $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{2x+1}$.

Bài tập 2. Tính giới hạn :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left[\operatorname{tg} 2x.\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right].$$

Bài tập 3. Tính giới hạn:

$$\lim_{x \to 1} \left[(x-1)^2.\sin\frac{1}{x-1}\right].$$

Bài tập 4. Tính giới hạn:

$$\lim_{x \to 0} \left(x.\cos\frac{1}{x}\right).$$

CHƯƠNG III

HÀM SỐ LIÊN TỤC

CHỦ ĐỀ 1

HÀM SỐ LIÊN TỤC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

Định nghĩa 1: *Cho hàm số* $y = f(x)$ *xác định trên khoảng* (a, b). *Hàm số*

$y = f(x)$ *được gọi là liên tục tại điểm* $x_0 \in (a, b)$ *nếu :*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Nếu tại điểm x_0 hàm số $y = f(x)$ không liên tục, thì được gọi là *gián đoạn* tại x_0 và điểm x_0 được gọi là *điểm gián đoạn* của hàm số $y = f(x)$.

Chú ý 1: Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu ba điều kiện sau được đồng thời thoả mãn :

(i) $f(x)$ xác định tại x_0.

(ii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ tồn tại.

(iii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại điểm x_0 nếu một trong ba điều kiện trên không được thoả mãn.

Chú ý 2: Nếu sử dụng giới hạn một phía thì :

1. Nếu $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ tồn tại và $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ thì hàm số $y = f(x)$ được gọi là *liên tục trái tại điểm* x_0.
2. Nếu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ tồn tại và $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ thì hàm số $y = f(x)$ được gọi là *liên tục phải tại điểm* x_0.
3. Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Đặc trưng khác của tính liên tục tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a ; b)$. Giả sử x_0 và $x (x \neq x_0)$ là hai phần tử của $(a ; b)$.

- Hiệu $x - x_0$, kí hiệu là Δx (đọc là đen - ta x), được gọi là *số gia của đối số tại điểm* x_0. Ta có :

$$\Delta x = x - x_0 \Leftrightarrow x = x_0 + \Delta x.$$

- Hiệu $y - y_0 = f(x) - f(x_0)$, kí hiệu là Δy, được gọi là *số gia tương ứng của hàm số tại điểm x_0*. Ta có :

$$\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Đặc trưng : Dùng khái niệm số gia, ta có thể đặc trưng tính liên tục của hàn số $y = f(x)$ tại điểm x_0 như sau :

Định lí 1. *Một hàm số $y = f(x)$, xác định trên $(a; b)$, là liên tục tại $x_0 \in (a; b)$ nếu và chỉ nếu :*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Chứng minh.

Thật vậy, ta có :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

2. HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG

***Định nghĩa** 2*: Ta có :

1. *Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trong khoảng $(a; b)$ nếu nó liên tục tại mỗi điểm của khoảng đó.*
2. *Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu nó*
   - *Liên tục trong khoảng $(a; b)$,*
   - $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ *(liên tục bên phải tại điểm a),*
   - $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ *(liên tục bên trái tại điểm b).*

Chú ý :

1. Đồ thị của một hàm số liên tục trên một khoảng là một "đường liền" trên khoảng đó.
2. Khi ta nói hàm số $y = f(x)$ liên tục mà không chỉ ra trên khoảng nào thì có nghĩa là hàm số liên tục trên tập xác định của nó.

3. CÁC ĐỊNH LÍ VỀ HÀM SỐ LIÊN TỤC

Định lí 2. *Tổng, hiệu, tích, thương (với mẫu khác 0) của các hàm số liên tục tại một điểm là hàm số liên tục tại điểm đó.*

Định lí 3. *Các hàm số đa thức, hàm số hữu tỉ, hàm số lượng giác là liên tục trên tập xác định của chúng.*

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm – Dạng I.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho hàm số : $f(x) = \begin{cases} f_1(x) \text{ khi } x \neq x_0 \\ f_2(x) \text{ khi } x = x_0 \end{cases}$.

Để xét tính liên tục hoặc xác định giá trị của tham số để hàm số liên tục tại điểm x_0, chúng ta thực hiện theo các bước sau :

Bước 1: Tính giới hạn:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) = L.$$

Bước 2: Tính $f(x_0) = f_2(x_0)$.

Bước 3: Đánh giá hoặc giải phương trình $L = f_2(x_0)$, từ đó đưa ra kết luận.

Ví dụ 1: Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm $x_0 = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} \text{ khi } x \neq 1 \\ x + a \text{ khi } x = 1 \end{cases}.$$

Giải

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbf{R}$.

Ta có : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} (x + 1) = 2,$

$f(1) = a + 1.$

Vậy :

- Nếu: $2 = a + 1 \Leftrightarrow a = 1 \Leftrightarrow f(1) = 2 = \lim\limits_{x \to 1} f(x),$

  thì hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 1$.
- Nếu: $2 \neq a + 1 \Leftrightarrow a \neq 1 \Leftrightarrow f(1) \neq 2 = \lim\limits_{x \to 1} f(x),$

  thì hàm số gián đoạn tại điểm $x_0 = 1$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Xét tính liên tục của các hàm số sau tại điểm $x_0 = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} \text{ khi } x \neq 1 \\ 3x + a \text{ khi } x = 1 \end{cases}.$$

Bài tập 2: Xét tính liên tục của các hàm số sau tại các điểm $x = 0$ và $x = 3$:

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{khi } x = 0 \\ \dfrac{x^2 - x - 6}{x(x-3)} & \text{khi } x^2 - 3x \neq 0. \\ b & \text{khi } x = 3 \end{cases}$$

Bài tập 3: Tổng hai hàm $f(x) + g(x)$ có nhất thiết phải gián đoạn tại điểm x_0 đã cho hay không, nếu :

a. Hàm $f(x)$ liên tục còn hàm $g(x)$ gián đoạn tại $x = x_0$.

b. Cả hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ đều gián đoạn tại $x = x_0$.

Nêu các ví dụ tương ứng.

Bài toán 2: Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm – Dạng II.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho hàm số : $f(x) = \begin{cases} f_1(x) \text{ khi } x < x_0 \\ f_2(x) \text{ khi } x \geq x_0 \end{cases}$.

Để xét tính liên tục hoặc xác định giá trị của tham số để hàm số liên tục tại điểm x_0, chúng ta thực hiện theo các bước sau :

Bước 1: Tính $f(x_0) = f_2(x_0)$.

Bước 2: (*Liên tục trái*) Tính :

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f_1(x) = L_1.$$

Đánh giá hoặc giải phương trình $L_1 = f_2(x_0)$, từ đó đưa ra lời kết luận về liên tục trái.

Bước 3: (*Liên tục phải*) Tính :

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f_2(x) = L_2.$$

Đánh giá hoặc giải phương trình $L_2 = f_2(x_0)$, từ đó đưa ra lời kết luận về liên tục phải.

Bước 4: Đánh giá hoặc giải phương trình $L_1 = L_2$, từ đó đưa ra lời kết luận.

Ví dụ 1: Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm $x_0 = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x + a \text{ khi } x < 0 \\ x^2 + 1 \text{ khi } x \geq 0 \end{cases}.$$

Giải

Hàm số xác định với mọi $x \in R$.

Ta có :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^2 + 1) = 1 \text{ và } \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x + a) = a.$$

$$f(0) = 1.$$

Vậy :

- Nếu a = 1 thì:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 1 \Leftrightarrow \text{hàm số liên tục tại } x_0 = 1$$

- Nếu a ≠ 1 thì:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x) \Leftrightarrow \text{hàm số gián đoạn tại } x_0 = 1.$$

Ví dụ 2: Cho hàm số : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{|x - 1|} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$.

a. Tìm a để f(x) liên tục trái tại điểm x = 1.

b. Tìm a để f(x) liên tục phải tại điểm x = 1.

c. Tìm a để f(x) liên tục trên **R**.

Giải

Ta có : $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{khi } x > 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \\ 2 - x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.

a. Để f(x) liên tục trái tại điểm x = 1

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) \text{ tồn tại và } \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1).$$

Ta có : $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (2 - x) = 1$ và $f(1) = a$.

Vậy, điều kiện là a = 1.

b. Để f(x) liên tục phải tại điểm x = 1

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x) \text{ tồn tại và } \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1).$$

Ta có : $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x - 2) = -1$ và $f(1) = a$.

Vậy, điều kiện là a = − 1.

c. Hàm số liên tục trên **R** trước hết phải có

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \Leftrightarrow 1 = -1 \text{ (mâu thuẫn).}$$

Vậy, không tồn tại a để hàm số liên tục trên **R**.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Xét tính liên tục của các hàm số sau tại điểm $x_0 = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2a & \text{khi } x < 0 \\ x^2 + x + 1 & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}.$$

Bài tập 2: Xét tính liên tục của các hàm số sau tại điểm $x = 1$ và $x = -1$:

$$f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2} & \text{khi } |x| \leq 1 \\ |x - 1| & \text{khi } |x| > 1 \end{cases}.$$

Bài toán 3: Xét tính liên tục của hàm số trên một khoảng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để xét tính liên tục hoặc xác định giá trị của tham số để hàm số liên tục trên khoảng I, chúng ta thực hiện theo các bước sau :

Bước 1: Xét tính liên tục của hàm số trên các khoảng đơn.

Bước 2: Xét tính liên tục của hàm số tại các điểm giao.

Bước 3: Kết luận.

Ví dụ 1: Chứng tỏ rằng hàm số sau liên tục trên **R** :

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}.$$

Giải

Hàm số f(x) liên tục với mọi $x \neq 0$.

Xét tính liên tục của f(x) tại điểm $x = 0$.

Ta có : $\left|x.\cos\dfrac{1}{x^2}\right| = |x|.\left|\cos\dfrac{1}{x^2}\right| \leq |x|$

$$\Rightarrow -|x| \leq x\cos\frac{1}{x^2} \leq |x| \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(x.\cos\frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

Mặt khác $f(0) = 0$.

Do đó, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) \Rightarrow$ hàm số liên tục tại điểm $x = 0$.

Vậy hàm số liên tục trên toàn trục số thực **R**.

Ví dụ 2: Xét tính liên tục của hàm số sau trên toàn trục số :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x < 1 \\ ax + 1 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}.$$

Giải

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbf{R}$.

1. Khi $x < 1$, ta có $f(x) = x^2 + x$ nên hàm số liên tục với $x < 1$.
2. Khi $x > 1$, ta có $f(x) = ax + 1$ nên hàm số liên tục với $x > 1$.
3. Khi $x = 1$, ta có :

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 + x) = 2$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (ax + 1) = a + 1.$$

$$f(1) = a + 1.$$

Do đó :

- Nếu $a = 1$ thì $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 2$, do đó hàm số liên tục tại $x_0 = 1$.
- Nếu $a \neq 1$ thì $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$, do đó hàm số gián đoạn tại $x_0 = 1$.

Kết luận :

- Nếu $a = 1$, hàm số liên tục trên toàn trục số.
- Nếu $a \neq 1$, hàm số liên tục trên $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ và gián đoạn tại $x_0 = 1$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Xác định a, b để hàm số sau liên tục trên toàn trục số:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x \ \text{ khi } |x| \leq \dfrac{\pi}{2} \\ ax + b \ \text{ khi } |x| > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Bài tập 2: Xét tính liên tục của hàm hợp $y = f(u)$ trong đó $u = g(x)$ nếu :

$$f(u) = \begin{cases} u & \text{khi } u > 0 \\ u - 1 & \text{khi } u \leq 0 \end{cases} \text{ và } g(x) = \begin{cases} x & \text{khi } |x| > 0 \\ x - 1 & \text{khi } |x| \leq 0 \end{cases}.$$

Bài tập 3: Có thể khẳng định rằng bình phương của một hàm gián đoạn cũng là một hàm gián đoạn hay không ? Tìm ví dụ minh hoạ.

Bài tập 4: Chứng minh rằng nếu $f(x)$ là hàm liên tục thì hàm số $F(x) = |f(x)|$ cũng là một hàm liên tục.

Bài tập 5: Cho f là hàm số liên tục trên $[0, +\infty)$ mà $f(t) = f\left(\dfrac{1}{t}\right)$ $\forall t > 0$. Chứng tỏ rằng hàm số g cho bởi công thức sau:

$$g(x) = \begin{cases} f(\operatorname{tg} x) & \text{khi } 0 \leq x < \dfrac{\pi}{2} \\ f(0) & \text{khi } x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

cũng liên tục trên $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

CHỦ ĐỀ 2

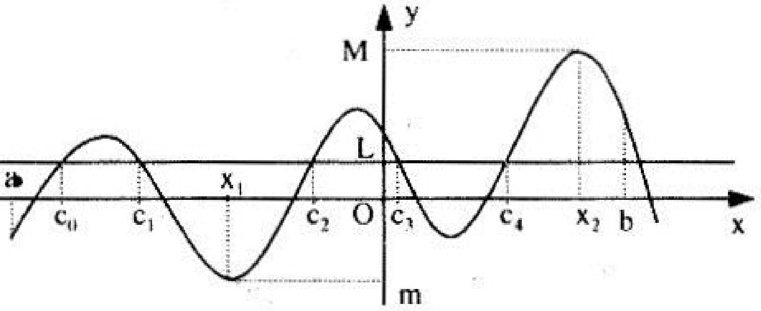
TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ LIÊN TỤC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Định lí 4. *Nếu hàm số* $y = f(x)$ *liên tục và dương khi* $x = a$ *thì nó dương trên một khoảng nào đó chứa điểm* a.

Định lí 5. *Nếu hàm số* $y = f(x)$ *liên tục trên đoạn* [a, b], *thì nó đạt được giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất và mọi giá trị trung gian giữa giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên đoạn đó.*

Giải thích:



Tồn tại ít nhất một điểm $x_1 \in [a, b]$ và một điểm $x_2 \in [a, b]$ sao cho với mọi $x \in [a, b]$ ta có : $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$. Khi đó :

- Đặt $m = f(x_1)$ thì m là giá trị nhỏ nhất của f(x) trên đoạn [a, b].
- Đặt $M = f(x_2)$ thì M là giá trị lớn nhất của f(x) trên đoạn [a, b].

Với mọi giá trị trung gian L giữa m và M, tức là sao cho $m \le L \le M$, tồn tại ít nhất một điểm $c \in [a, b]$ sao cho $f(c) = L$.

Hệ quả.

- *Nếu hàm số* $y = f(x)$ *liên tục trên đoạn* [a, b] *và* $f(a)f(b) < 0$ *thì tồn tại ít nhất một điểm* $x_0 \in (a, b)$ *sao cho* $f(x_0) = 0$.
- Nói cách khác: *Nếu hàm số* $y = f(x)$ *liên tục trên đoạn* [a, b] *và* $f(a)f(b) < 0$ *thì phương trình* $f(x) = 0$ *có ít nhất một nghiệm trong khoảng* (a, b).

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Sử dụng tính liên tục của hàm số chứng minh phương trình có nghiệm.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho phương trình :

$$f(x) = 0.$$

Để chứng minh phương trình có k nghiệm trong [a, b], ta thực hiện theo các bước sau :

Bước 1: Chọn các số $a < T_1 < T_2 < \ldots < T_{k-1} < b$ chia đoạn [a, b] thành k khoảng thoả mãn :

$$\begin{cases} f(a).f(T_1) < 0 \\ \ldots \\ f(T_{k-1}).f(b) < 0 \end{cases}.$$

Bước 2: Kết luận về số nghiệm của phương trình trên đoạn [a, b].

Ví dụ 1: Chứng minh rằng phương trình :

$$x^5 + x - 1 = 0$$

có nghiệm trên khoảng $(-1, 1)$.

Giải

Xét hàm số $f(x) = x^5 + x - 1$ liên tục trên **R**.

Ta có :

$$f(-1).f(1) = -3.1 = -3 < 0,$$

Vậy phương trình có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(-1, 1)$.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng phương trình :

$$2x + 6\sqrt[3]{1-x} = 3.$$

có ba nghiệm phân biệt thuộc $(-7, 9)$.

Giải

Đặt $t = \sqrt[3]{1-x}$.

Khi đó phương trình có dạng :

$$2t^3 - 6t + 1 = 0.$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 - 6t + 1$ liên tục trên **R**.

Ta có :

$$f(-2) = -3,\ f(0) = 1,\ f(1) = -3,\ f(2) = 5,$$

suy ra :

- $f(-2).f(0) = -3 < 0$, phương trình có một nghiệm $t_1 \in (-2, 0)$, khi đó :

  $$t_1 = \sqrt[3]{1-x} \Rightarrow x_1 = 1 - t_1^3 \text{ và } t_1 \in (1, 9).$$

- $f(0).f(1) = -3 < 0$, phương trình có một nghiệm $t_2 \in (0, 1)$, khi đó :

  $$t_2 = \sqrt[3]{1-x} \Rightarrow x_2 = 1 - t_2^3 \text{ và } t_2 \in (0, 1).$$

- $f(1).f(2) = -15 < 0$, phương trình có một nghiệm $t_3 \in (1, 2)$, khi đó :

  $$t_3 = \sqrt[3]{1-x} \Rightarrow x_3 = 1 - t_3^3 \text{ và } t_3 \in (-7, 0).$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm trên khoảng $(-7, 9)$.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng với mọi m phương trình :

$$x^3 + mx^2 - 1 = 0$$

luôn có một nghiệm dương.

Giải

Xét hàm số $f(x) = x^3 + mx^2 - 1$ liên tục trên **R**.

Ta có :

$$f(0) = -1 < 0$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, vậy tồn tại $c > 0$ để $f(c) > 0$,

suy ra :

$$f(0).f(c) < 0.$$

Vậy phương trình $f(x) = 0$ luôn có một nghiệm thuộc $(0, c) \Leftrightarrow$ phương trình luôn có một nghiệm dương.

Ví dụ 4: Cho phương trình :

$$|x|^3 - mx^2 + (m+1)|x| - 2 = 0. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với m = 1.

b. Chứng minh rằng với mọi m phương trình luôn có ít nhất hai nghiệm phân biệt.

Giải

Đặt $t = |x|$, $t \geq 0$, ta được :

$$t^3 - mt^2 + (m+1)t - 2 = 0. \qquad (2)$$

a. Với m = 1, phương trình có dạng :

$$t^3 - t^2 + 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2+2) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Với m = 1, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = \pm 1$.

b. Xét hàm số $f(t) = t^3 - mt^2 + (m+1)t - 2$ liên tục trên **R**.

Ta có :

$$f(0) = -2 < 0,$$

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = +\infty \Rightarrow \exists c > 0 \text{ sao cho } f(c) > 0,$$

suy ra :

$f(0).f(c) < 0$, (2) có một nghiệm $t_1 \in (0, c) \Rightarrow x = \pm t_1$.

Vậy, với mọi m phương trình luôn có ít nhất hai nghiệm phân biệt.

Ví dụ 5: Chứng minh rằng với mọi m phương trình :

$$(\sqrt{x-1})^3 + mx = m + 1.$$

luôn có một nghiệm lớn hơn 1.

Giải

Đặt $t = \sqrt{x-1}$, điều kiện $t \geq 0$.

Khi đó phương trình có dạng :

$$f(t) = t^3 + mt^2 - 1 = 0.$$

Xét hàm số $y = f(t)$ liên tục trên $[0, +\infty)$.

Ta có :

$$f(0) = -1 < 0$$

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$, vậy tồn tại $c > 0$ để $f(c) > 0$,

suy ra :

$$f(0).f(c) < 0.$$

Vậy phương trình $f(t) = 0$ luôn có một nghiệm thuộc $t_0 \in (0, c)$, khi đó :

$$\sqrt{x-1} = t_0 \Leftrightarrow x = t_0^2 + 1 > 1.$$

Vậy, với mọi m phương trình luôn có một nghiệm lớn hơn 1.

Ví dụ 6: Cho a, b, c là ba số dương phân biệt. Chứng minh rằng phương trình :

$$a(x-b)(x-c) + b(x-a)(x-c) + c(x-b)(x-a) = 0$$

luôn có hai nghiệm phân biệt.

Giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $a < b < c$ và đặt :

$$f(x) = a(x-b)(x-c) + b(x-a)(x-c) + c(x-b)(x-a)$$

Ta có :

$f(b) = b(b-a)(b-c) < 0$ và hệ số x^2 của $f(x)$ bằng $a + b + c > 0$.

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt thoả mãn $x_1 < b < x_2$.

Ví dụ 7: Chứng minh rằng phương trình :

$$p(x-a)(x-c) + q(x-b)(x-d) = 0$$

luôn có nghiệm, biết rằng $a \leq b \leq c \leq d$, p và q là hai số thực bất kì.

Giải

Xét hàm số $f(x) = p(x-a)(x-c) + q(x-b)(x-d)$ liên tục trên **R**.

Nếu $p = q = 0$, phương trình có nghiệm tuỳ ý.

Nếu $p \neq 0$ hoặc $q \neq 0$, không mất tính tổng quát ta giả sử $p \neq 0$. Khi đó :

$$f(b) = p(b-a)(b-c) \text{ và } f(d) = p(d-a)(d-c),$$

suy ra :

$$f(b).f(d) = p^2(b-a)(b-c)(d-a)(d-c) \leq 0.$$

Vậy, phương trình luôn có nghiệm.

Ví dụ 8: Cho $m > 0$ và a, b, c là ba số thực bất kì thoả mãn :

$$\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0.$$

Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm :

$$ax^2 + bx + c = 0. \qquad (1)$$

Giải

Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Ta có :

$$f(0) = c,$$

$$f\left(\frac{m+1}{m+2}\right) = \frac{(m+1)^2}{m+2}\left[\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c(m+2)}{(m+1)^2}\right] = \frac{-c}{m(m+2)},$$

suy ra :

$$f(0).f(\frac{m+1}{m+2}) = \frac{-c^2}{m(m+2)} \leq 0.$$

Vậy, phương trình (1) có nghiệm.

Ví dụ 9: Chứng minh rằng với mọi m phương trình :

$$\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} = m \qquad (1)$$

luôn có nghiệm.

Giải

Điều kiện $x \neq \frac{k\pi}{2}$, với $k \in \mathbf{Z}$.

Biến đổi phương trình về dạng :

$$\sin x - \cos x - m\sin x.\cos x = 0.$$

Xét hàm số $f(x) = \sin x - \cos x - m\sin x.\cos x$ liên tục trên đoạn $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có :

$$f(0) = -1 < 0 \text{ và } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 > 0 \Rightarrow f(0).f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0.$$

Vậy phương trình $f(x) = 0$ luôn có một nghiệm thuộc $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) luôn có một nghiệm thuộc khoảng $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Chứng minh rằng phương trình :

$$x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$$

có nghiệm thuộc $(-1, 1)$.

Bài tập 2. Chứng minh rằng phương trình :

$$x^5 - 5x^3 + 4x - 1 = 0$$

có năm nghiệm trên khoảng $(-2, 2)$.

Bài tập 3. Cho phương trình :

$$x^2 - m|x| - 1 = 0.$$

Chứng minh rằng với mọi m phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Bài tập 4. Chứng minh rằng với mọi $m > 2$ phương trình :

$$|x|^3 - 2mx^2 + 2 = 0.$$

luôn có bốn nghiệm phân biệt.

Bài tập 5. Chứng minh rằng phương trình :

$$p(\sqrt[3]{1-x} - a)(\sqrt[3]{1-x} - c) + q(\sqrt[3]{1-x} - b)(\sqrt[3]{1-x} - d) = 0$$

luôn có nghiệm, biết rằng $a \le b \le c \le d$, p và q là hai số thực bất kì.

Bài tập 6. Cho phương trình :

$$a(\sqrt[3]{x} - b)(\sqrt[3]{x} - c) + b(\sqrt[3]{x} - c)(\sqrt[3]{x} - a) + c(\sqrt[3]{x} - a)(\sqrt[3]{x} - b) = 0.$$

Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với a, b, c là ba số tuỳ ý.

Bài tập 7. Chứng minh rằng phương trình :

$$\sin x - x + 1 = 0$$

luôn có nghiệm.

Bài tập 8. Chứng minh rằng phương trình :

$$a(x - b)(x - c) + b(x - c)(x - a) + c(x - a)(x - b) = 0$$

luôn có nghiệm với a, b, c là ba số tuỳ ý.

Bài toán 2: Sử dụng tính liên tục của hàm số xét dấu hàm số.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng kết quả:

"*Nếu hàm số* y = f(x) *liên tục và không triệt tiêu trên đoạn* [a, b] *thì có dấu nhất định trên* (a, b)".

Ví dụ 1: Xét dấu hàm số:

$$f(x) = \sqrt{x+4} - \sqrt{1-x} - \sqrt{1-2x}.$$

Giải

Hàm số f(x) liên tục trên $[-4, \frac{1}{2}]$.

Giải phương trình f(x) = 0, ta có:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x} = \sqrt{x+4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ 1-2x \geq 0 \\ 1-x+1-2x+2\sqrt{(1-x)(1-2x)} = x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \leq \frac{1}{2} \\ \sqrt{(1-x)(1-2x)} = 2x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ 2x+1 \geq 0 \\ (1-x)(1-2x) = (2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x^2 + 7x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Như vậy, trên các khoảng $[-4, 0)$ và $(0, \frac{1}{2}]$ hàm số f(x) không triệt tiêu, do đó:

- Vì $f(-1) = \sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{3} < 0$ nên $f(x) < 0$ với $\forall x \in [-4, 0)$.
- Vì $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{9}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} > 0$ nên $f(x) > 0$ với $\forall x \in (0, \frac{1}{2}]$.

Ví dụ 2: Xét dấu hàm số:

$$f(x) = 2 + \cos x - 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} \text{ trên } (0, \pi).$$

Giải

Hàm số f(x) liên tục trên $(0, \pi)$.

Giải phương trình f(x) = 0 với ẩn phụ $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, suy ra $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, ta có:

$$2 + \frac{1-t^2}{1+t^2} - 2t = 0 \Leftrightarrow 2t^3 - t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(2t^2 + t + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \mathrm{tg}\frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}.$$

Như vậy, trên các khoảng $(0, \frac{\pi}{2})$ và $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ hàm số f(x) không triệt tiêu, do đó:

- Vì $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 + \frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} > 0$ nên $f(x) > 0$ với $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$.
- Vì $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2 - \frac{1}{2} - 2\sqrt{3} < 0$ nên $f(x) < 0$ với $\forall x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Xét dấu các hàm số sau:

a. $f(x) = 2\sqrt{x+1} - x - 1$.

b. $f(x) = x - \sqrt{2x+3}$.

c. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x + 1$.

d. $f(x) = x^2 + \sqrt{x+1} - 1$.

Bài tập 2. Xét dấu hàm số:

$$f(x) = \sqrt{3x+4} - \sqrt{2x+1} - \sqrt{x+3}.$$

Bài tập 3. Xét dấu các hàm số sau:

a. $f(x) = 6\mathrm{tg}x - \mathrm{tg}2x$.

b. $f(x) = \sin 4x - \mathrm{tg}x$.

c. $f(x) = \sin 2x + 2\mathrm{tg}x - 3$.

d. $f(x) = 1 + 3\sin 2x - 2\mathrm{tg}x$.

Bài tập 4. Xét dấu các hàm số sau:

a. $f(x) = (1 - \mathrm{tg}x)(1 + \sin 2x) - 1 - \mathrm{tg}x$.

b. $f(x) = 3\sin x + \cos x - 4\mathrm{cotg}\frac{x}{2} + 1$.

CHƯƠNG IV

HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

CHỦ ĐỀ 1

LUỸ THỪA – HÀM SỐ MŨ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. LUỸ THỪA

1.1. Luỹ thừa với số mũ nguyên

Với $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, $n \in \mathbf{Z}$ ta có định nghĩa:

1. $a^0 = 1, a^1 = a, a^{-1} = \frac{1}{a}$.

2. $a^{n+1} = a.a^n, a^{-n} = (a^{-1})^n = \frac{1}{a^n}$.

1.2. Căn bậc n

Cho $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{Z}$, $n > 1$, ta có:

- $x \in \mathbf{R}$ là căn bậc n của $a \Leftrightarrow x^n = a$.
- a có duy nhất một căn bậc n lẻ, ký hiệu $\sqrt[n]{a}$.
- $a > 0$ có 2 căn bậc n chẵn, ký hiệu $\sqrt[n]{a}$ và $-\sqrt[n]{a}$, trong đó $\sqrt[n]{a} > 0$, $-\sqrt[n]{a} < 0$

Từ đó với $a, b \in \mathbf{R}$, $a, b > 0$, $n, m, k \in \mathbf{Z}$, $n, m, k > 1$ ta có các kết quả sau:

1. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$.

2. $\sqrt[n]{a^{n.m}} = a^m$; $\qquad \sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$.

3. $\sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$; $\qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.

4. $a > b \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.

5. Với $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$ thì $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$.

1.3. Luỹ thừa với số mũ hữu tỉ

Cho $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$, $n, m \in \mathbf{Z}$, $n > 1$, ta định nghĩa:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ và quy ước } 0^{\frac{m}{n}} = 0 \text{ với } m > 0.$$

Từ đó $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

1.4. Luỹ thừa với số mũ vô tỉ

Cho a, x ∈ **R**, a > 0, (x_n) là dãy số hữu tỉ đơn điệu thoả mãn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, ta định nghĩa:

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{x_n}.$$

1.5. Tính chất

Cho a, b ∈ **R**, a, b > 0, x, y ∈ **R**, ta có:

(1). $a^x > 0$.

(2). $a^x.a^y = a^{x+y}$.

(3). $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.

(4). $(a^x)^y = a^{xy}$.

(5). $(ab)^x = a^x.b^x$.

(6). $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.

(7). Với a, b ≠ 1 và 0 < b < a thì:
- $x > 0 \Leftrightarrow b^x < a^x$.
- $x < 0 \Leftrightarrow b^x > a^x$.

2. HÀM SỐ MŨ

2.1. Định nghĩa

Hàm số mũ cơ số a ($0 < a \neq 1$) là hàm số xác định bởi công thức $y = a^x$.

2.2. Tính chất

Xét hàm số $y = a^x$, $0 < a \neq 1$, ta có các tính chất sau:

1. Liên tục trên **R**.
2. Sự biến thiên: Hàm số đơn điệu với mọi x.
   - Với a > 1 thì $a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$, tức là hàm số đồng biến.
   - Với 0 < a < 1 thì $a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$, tức là hàm số nghịch biến.
3. Đồ thị của hàm số có 2 dạng và luôn cắt trục Oy tại A(0, 1).

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Các phép toán về luỹ thừa.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng các kết quả đã biết và cần lưu ý:

1. Với a ∈ **R**, n ∈ **N**, n > 1 thì $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$.
2. Ngược lại $a\sqrt[2n]{A} = \begin{cases} \sqrt[2n]{a^{2n}.A} & \text{khi } a \geq 0 \\ -\sqrt[2n]{a^{2n}.A} & \text{khi } a < 0 \end{cases}$.

Ví dụ 1: Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{c^{-1}+(a+b)^{-1}}{[c^{-1}-(a+b)^{-1}](a+b+c)^2}\cdot\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right).$$

Giải

Ta có:

$$A = \frac{\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a+b}}{\left(\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{a+b}\right)(a+b+c)^2}\cdot\left(\frac{a^2+b^2+2ab-c^2}{2ab}\right)$$

$$= \frac{a+b+c}{(a+b-c)(a+b+c)^2}\cdot\frac{(a+b)^2-c^2}{2ab} = \frac{1}{2ab}.$$

Ví dụ 2: Rút gọn biểu thức:

$$A = (2-x)\sqrt{\frac{x}{x-2}}.$$

Giải

Vì điều kiện có nghĩa của biểu thức trong căn là $x > 2 \vee x \le 0$ nên ta xét hai khả năng:

- Nếu $x \le 0$ thì $A = \sqrt{\dfrac{(2-x)^2x}{x-2}} = \sqrt{x(x-2)}$.
- Nếu $x > 2$ thì $A = -\sqrt{\dfrac{(2-x)^2x}{x-2}} = -\sqrt{x(x-2)}$.

Tóm lại ta được:

$$A = \begin{cases}\sqrt{x(x-2)} & \text{khi } x \le 0\\ -\sqrt{x(x-2)} & \text{khi } x > 2\end{cases}.$$

Ví dụ 3: Rút gọn biểu thức:

$$A = 2(ab)^{\frac{1}{2}}.(a+b)^{-1}.\left[1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \text{ với } a.b > 0.$$

Giải

Ta có:

$$A = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)} = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{\frac{a^2+b^2+2ab}{ab}} = \frac{\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{\left(\frac{a+b}{\sqrt{ab}}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{ab}}{a+b}\,\frac{|a+b|}{\sqrt{ab}} = \frac{|a+b|}{a+b}.$$

Vì a.b > 0 nên a, b > 0 hoặc a, b < 0 do đó:

$$A = \begin{cases} 1 & \text{khi } a,b > 0 \\ -1 & \text{khi } a,b < 0 \end{cases}.$$

Ví dụ 4: Cho $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}} + \sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}} = a$, chứng minh rằng:

$$a^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}.$$

Giải

Ta có:

$$a^2 = \left(\sqrt{x^2+x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}} + \sqrt{y^2+x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}}\right)^2$$

$$= x^2 + x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}} + y^2 + x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}} + 2\sqrt{\left(x^2+x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}\right)\left(y^2+x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}\right)}$$

$$= x^2 + x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}} + y^2 + x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}} + 2\sqrt{x^{\frac{8}{3}}y^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{8}{3}} + 2x^2y^2}$$

$$= x^2 + x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}} + y^2 + x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}} + 2\sqrt{\left(x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}\right)^2}$$

$$= x^2 + x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}} + y^2 + x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}} + 2\left(x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}\right)$$

$$= (x^{\frac{2}{3}})^3 + 3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}} + (y^{\frac{2}{3}})^3 = (x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}})^3$$

suy ra:

$$a^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Rút gọn các biểu thức sau:

a. $A = \dfrac{ab^{-2}(ab^{-1})^2(a^{-1}b^2)}{a^{-2}b(a^{-2}b^{-1})^3}$.

b. $B = \dfrac{ab\sqrt[n]{\dfrac{a^{1-n}}{b^n} - \dfrac{a^{-n}}{b^{n-1}}}}{\sqrt{a-b}}$.

Bài tập 2. Rút gọn biểu thức :

$$A = \left[\frac{4a-9a^{-1}}{2a^{\frac{1}{2}}-3a^{-\frac{1}{2}}} + \frac{a-4+3a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}\right]^2, \text{ với } 0 < a \neq 1, \frac{3}{2}.$$

Bài tập 3. Rút gọn biểu thức :

$$A = \frac{\sqrt[3]{a+\sqrt{2-a^2}}\,.\sqrt[6]{32(1-a\sqrt{2-a^2})}}{\sqrt[3]{1-a^2}}.$$

Bài tập 4. Rút gọn biểu thức :

$$A = \frac{2ab\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}, \text{ với } x = 2\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^{-1}, \; a, b < 0.$$

Bài tập 5. Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{x}{2}\sqrt[4]{(x^2-1)(x+1)^3}\left[\frac{x^2+3x+2}{\sqrt[4]{x^2-2x+1}}\right]^{-1}.$$

Bài tập 6. Chứng minh rằng $ax^2 + by^2 + cz^2 = (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})^3$, biết:

$$ax^3 = by^3 = cz^3 \text{ và } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1.$$

Bài toán 2: So sánh các số có dạng luỹ thừa.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng các kết quả:

1. Với $a > 1$ thì $a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$.
2. Với $0 < a < 1$ thì $a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$.
3. Với $a, b \neq 1$ và $0 < b < a$ thì:
   - $x > 0 \Leftrightarrow b^x < a^x$.
   - $x < 0 \Leftrightarrow b^x > a^x$.

Ví dụ 1: So sánh các số a và b, biết:

a. $a = (\sqrt{3}-1)^{\frac{1}{2}}$ và $b = (\sqrt{3}-1)^{\frac{3}{4}}$.

b. $a = 2^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ và $b = 2^{\sqrt{2}-1}$.

Giải

a Vì:

$$\begin{cases} \sqrt{3}-1 < 1 \\ \frac{1}{2} < \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{3}-1)^{\frac{1}{2}} > (\sqrt{3}-1)^{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow a > b.$$

b Vì:

$$\begin{cases} 2 > 1 \\ \sqrt{3}-\sqrt{2} < \sqrt{2}-1 \end{cases} \Rightarrow 2^{\sqrt{3}-\sqrt{2}} < 2^{\sqrt{2}-1} \Leftrightarrow a < b.$$

Ví dụ 2: So sánh các số a và b, biết:

a. $a = (\sqrt{2}-1)^2$ và $b = (\sqrt{2}+1)^{\frac{3}{2}}$.

b. $a = (26+15\sqrt{3})^{1+\sqrt{3}}$ và $b = (7-4\sqrt{3})^{1-2\sqrt{3}}$.

Giải

a. Ta có:

$$b = (\sqrt{2}+1)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{2}-1)^{-\frac{3}{2}},$$

từ đó vì:

$$\begin{cases} 0 < \sqrt{2}-1 < 1 \\ 2 > -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{2}-1)^2 < (\sqrt{2}-1)^{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow a < b.$$

b. Ta có:

$$\begin{cases} a = (26+15\sqrt{3})^{1+\sqrt{3}} = (2+\sqrt{3})^{3(1+\sqrt{3})} \\ b = (7-4\sqrt{3})^{1-2\sqrt{3}} = (2-\sqrt{3})^{2(1-2\sqrt{3})} = (2+\sqrt{3})^{-2(1-2\sqrt{3})} \end{cases}$$

từ đó vì:

$$\begin{cases} 2+\sqrt{3} > 1 \\ 3(1+\sqrt{3}) > -2(1-2\sqrt{3}) \end{cases} \Rightarrow (2+\sqrt{3})^{3(1+\sqrt{3})} > (2+\sqrt{3})^{-2(1-2\sqrt{3})} \Leftrightarrow a > b.$$

Ví dụ 3: So sánh các số a và b, biết:

$$a = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \text{ và } b = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

Giải

Ta có:

$$b = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}},$$

từ đó vì:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{5}}{2} > \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} > 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{2}{3}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow a > b.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Nhận xét gì về cơ số a, biết:

a. $a^{\frac{1}{2}} > a^{3}$.

b. $a^{-\frac{3}{2}} < a^{\frac{2}{3}}$.

Bài tập 2. So sánh a, b biết:

a. $\pi^{a} > \pi^{b}$.

b. $(\sqrt{5} - 2)^{a} > (\sqrt{5} + 2)^{b}$.

Bài tập 3. So sánh a, b biết:

a. $a = (2-\sqrt{3})^{\frac{3}{2}}$ và $b = (7+4\sqrt{3})^{-\frac{2}{3}}$.

b. $a = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}$ và $b = (9\sqrt{3}+11\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}$.

Bài tập 4. So sánh a, b biết:

$a = 2^{300}$ và $b = 3^{200}$.

Bài tập 5. So sánh a, b biết:

a. $a = (\sqrt{5}-2)^{\frac{3}{2}}$ và $b = (\sqrt{5}-2)^{\frac{5}{3}}$.

b. $a = (4-\sqrt{3})^{\frac{2}{3}}$ và $b = (\sqrt{4+\sqrt{3}})^{\frac{5}{4}}$.

Bài tập 6. So sánh a, b biết:

a. $a = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$ và $b = \frac{8}{\sqrt[4]{27}}$.

b. $a = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\sqrt{2}}$ và $b = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{-\sqrt{3}}$.

Bài toán 3: Tìm tập xác định của hàm số mũ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Xét hàm số $y = [f_1(x)]^{f_2(x)}$.

Để tìm tập xác định D của hàm số ta đi giải điều kiện:

$$\begin{cases} f_1(x) \text{ có nghĩa và } f_1(x) > 0 \\ f_2(x) \text{ có nghĩa} \end{cases}.$$

Ví dụ 1: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = (x^2 - 4x + 3)^{\frac{x}{x-1}}$.

b. $y = [x + 1 - \sqrt{2(x^2 - 1)}\,]^{x+1}$.

Giải

a. Hàm số có nghĩa khi:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < 1 \end{array}\right. \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < 1 \end{array}\right..$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

b. Hàm số có nghĩa khi:

$$x + 1 - \sqrt{2(x^2 - 1)} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{2(x^2 - 1)} < x + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 0 \leq 2(x^2 - 1) < (x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ |x| \geq 1 \\ x^2 - 2x - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ |x| \geq 1 \\ -1 < x < 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x < 3.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = [1, 3)$.

Ví dụ 2: Tìm tập xác định và tập giá trị của hàm số:

$$y = (x^2 - 1)^{\operatorname{tg}x} + (x^2 - 1)^{-\operatorname{tg}x}.$$

Giải

Hàm số có nghĩa khi:

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| > 1 \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\},\ k \in \mathbf{Z}.$$

Để tìm tập giá trị của hàm số ta sử dụng bất đẳng thức:

$$y = (x^2 - 1)^{\operatorname{tg}x} + (x^2 - 1)^{-\operatorname{tg}x} \overset{\text{Côsi}}{\geq} 2\sqrt{(x^2 - 1)^{\operatorname{tg}x}.(x^2 - 1)^{-\operatorname{tg}x}} = 2.$$

Mặt khác:

$$\lim_{x \to \infty} y = +\infty$$

Vậy $I = [1, +\infty)$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = (\sqrt{-x^2 + 4x - 3} - 2x + 5)^{x+2}$.

b. $y = (\dfrac{2x}{\sqrt{2x + 1} - 1} - 2x - 2)^{\operatorname{tg}x}$.

Bài tập 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = (x + \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 - 4}} - 3\sqrt{5})^{x + \operatorname{cotg}x}$.

b. $y = (2\cos^2 x - 3\cos x + 1)^{\sin x}$.

Bài toán 4: Tìm giới hạn của hàm số mũ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Chúng ta có các dạng giới hạn đặc biệt sau :

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1.$

b. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e.$

c. $\lim\limits_{x\to \infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e.$

Ví dụ 1: Tính các giới hạn:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}.$ b. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}.$

Giải

a. Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(a\frac{e^{ax}-1}{ax}-b\frac{e^{bx}-1}{bx}\right)=a-b.$$

b Ta có:

$$(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}=(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}\frac{\sin 2x}{x}}=(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}\frac{\sin 2x}{2x}2}.$$

Do đó:

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}\frac{\sin 2x}{2x}2}=e^2.$$

Ví dụ 2: Tính các giới hạn:

$$\lim_{x\to \infty}\left(\frac{3x+5}{3x-1}\right)^{2x}.$$

Giải

Ta có:

$$\left(\frac{3x+5}{3x-1}\right)^{2x}=\left(1+\frac{6}{3x-1}\right)^{2x},$$

đặt $\dfrac{1}{t}=\dfrac{6}{3x-1}\Leftrightarrow x=\dfrac{6t+1}{3}\Rightarrow$ khi $x\to\infty$ thì $t\to\infty$.

Vậy:

$$\left(\frac{3x+5}{3x-1}\right)^{2x}=\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2\frac{6t+1}{3}}=\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t\frac{2(6t+1)}{3t}}.$$

Do đó:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+5}{3x-1}\right)^{2x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t\frac{2(6t+1)}{3t}}=e^4.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-2^x}{x^2-3x}$.

b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-2^x}{4^x-3^x}$.

c. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^x-2x}{x-1}$.

d. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(4^x-3^x)(3^x-2^x)}{(8^x-6^x)(4^x-2^x)}$.

Bài tập 2. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-e^x)(1-\cos 2x)}{x^3+x^2}$.

b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x^2}.\cos^2 x-1}{x^2}$.

Bài tập 3. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}\right)^{x^{-2}}$.

b. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{2x+1}$.

Bài tập 4. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$, với $a > 0$.

b. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a}$, với $a > 0$.

c. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

d. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{a^{x+2}+b^{x+2}+c^{x+2}}{a^2+b^2+c^2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Bài tập 5. (ĐHHH – 99) Tính giới hạn:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\sin x}.$$

Bài tập 6. (ĐHGTVT – 2001): Tính giới hạn:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x^2}-\sqrt[3]{1+x^2}}{\ln(1+x^2)}.$$

Bài toán 5: Xét tính liên tục của hàm số mũ tại điểm x_0.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Khẳng định rằng hàm số xác định tại điểm x_0, tính $f(x_0)$.

Bước 2: Xác định $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Bước 3: Kiểm nghiệm $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Bước 4: Kết luận.

Ví dụ 1: Xác định mối liên hệ giữa a, b để hàm số liên tục trên toàn trục số

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3^{x^2} - \cos x}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ a + 2b & \text{khi } x = 0 \end{cases}.$$

Giải

Để hàm số liên tục trên **R** điều kiện cần và đủ là nó liên tục tại điểm $x_0 = 0$.

Hàm số xác định tại điểm $x_0 = 0$ và $f(0) = a + 2b$.

Ta có:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{3^{x^2} - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{3^{x^2} - 1}{x^2} + \frac{1 - \cos x}{x^2}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{e^{\ln 3^{x^2}} - 1}{\ln 3^{x^2}}.\ln 3 + \frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{4\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}\right] = \ln 3 + \frac{1}{2}.$$

Vậy để hàm số liên tục trên toàn trục số điều kiện là $a + 2b = \ln 3 + \frac{1}{2}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm $x_0 = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x} - 1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} & \text{khi } x \neq 0 \\ 2 & \text{khi } x = 0 \end{cases}.$$

Bài tập 2. Xác định a để hàm số sau liên tục trên **R**:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\sin x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 3a + 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}.$$

CHỦ ĐỀ 2

LOGARIT – HÀM SỐ LOGARIT

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. LOGARIT

1.1. Định nghĩa

Cho $0 < a \neq 1$, $b > 0$, ta định nghĩa:

$$c = \log_a b \Leftrightarrow b = a^c,$$

từ định nghĩa ta được

$$\log_a 1 = 0,\ \log_a a^\alpha = \alpha,\ a^{\log_a b} = b.$$

Ta sử dụng ký hiệu:

- $\log_{10} b = \lg b$, đọc là lốc của b.
- $\log_e b = \ln b$, đọc là loga Nêpe của b.

1.2. Tính chất

Cho $0 < a \neq 1$, $x, y > 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$, ta có:

(1). $\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$,
trong trường hợp chỉ có $x.y > 0$ thì $\log_a(xy) = \log_a|x| + \log_a|y|$.

(2). $\log_a x - \log_a y = \log_a \dfrac{x}{y}$,

trong trường hợp chỉ có $x.y > 0$ thì $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a|x| - \log_a|y|$.

(3). $\log_a b^\alpha = \alpha\log_a b$,
trong trường hợp $b \in \mathbf{R}$ và $\alpha = 2k$, $k \in \mathbf{Z}$ thì $\log_a b^\alpha = \alpha\log_a|b|$.

(4). $\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha}\log_a b$,

trong trường hợp $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 1$ và $\alpha = 2k$, $k \in \mathbf{Z}$ thì $\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha}\log_{|a|} b$.

1.3. Công thức đổi cơ số

Cho $0 < a, b \neq 1$, $c > 0$, ta có:

(1). $\log_a c = \dfrac{\log_b c}{\log_b a}$

(2). $\log_b c = \log_b a.\log_a c$.

(3). $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

(4). $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ với $ab \neq 1$.

2. HÀM SỐ LOGARIT

2.1. Định nghĩa

Hàm số logarit cơ số a ($0 < a \neq 1$) là hàm số xác định bởi công thức:

$$y = \log_a x.$$

2.2. Tính chất

Xét hàm số $y = \log_a x$, với $0 < a \neq 1$, ta có các tính chất sau:

1. Hàm số liên tục trên $D = (0, +\infty)$ và tập giá trị $I = \mathbb{R}$.
2. Sự biến thiên: Hàm số đơn điệu với mọi x.
    - Với $a > 1$ thì $\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$, tức là hàm số đồng biến.
    - Với $0 < a < 1$ thì $\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$, tức là hàm số nghịch biến.
3. Đồ thị của hàm số luôn cắt trục Ox tại B(1, 0).

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Các phép toán logarit.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng các kết quả đã biết, ngoài ra:

1 Để tính $\log_a b$ ta biến đổi $b = a^\alpha$, từ đó

$$\log_a b = \log_a a^\alpha = \alpha.$$

2 Để tính $b^{\log_a c}$ ta biến đổi $b = a^\alpha$, từ đó

$$b^{\log_a c} = a^{\alpha \log_a c} = (a^{\log_a c})^\alpha = c^\alpha.$$

3 Để tính $\log_a b$ theo $m = \log_a x$ và $n = \log_a y$ ta biến đổi $b = a^\alpha.x^\beta.y^\gamma$, từ đó

$$\log_a b = \log_a (a^\alpha.x^\beta.y^\gamma) = \log_a a^\alpha + \log_a x^\beta + \log_a y^\gamma = \alpha + m\beta + n\gamma.$$

Ví dụ 1: Tính giá trị của các biểu thức sau:

a. $A = \log_{2\sqrt{2}} 8 - 9\log_8^2 2 + \dfrac{6\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} \dfrac{27}{\sqrt[5]{9}}}{\log_{\frac{1}{2}} 2\sqrt[5]{2}}$.

b. $B = \dfrac{25^{\log_5 6} + 49^{\log_7 8} - 3}{3^{1+\log_9 4} + 4^{2-\log_2 3} + 5^{\log_{125} 27}}$.

c. $C = \dfrac{36^{\log_6 5} + 10^{1-\lg 2} - 3^{\log_9 36}}{\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}}$.

Giải

a. Ta biến đổi biểu thức về dạng:

$$A = \log_{2^{\frac{3}{2}}} 2^3 - 9(\log_{2^3} 2)^2 + \frac{6\log_{3^{-\frac{1}{2}}} 3^{\frac{13}{5}}}{\log_{2^{-1}} 2^{\frac{6}{5}}}$$

$$= 3.\frac{2}{3} - 9.\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{6.\frac{13}{5}.(-2)}{\frac{6}{5}.(-1)} = 2 - 1 + 26 = 27.$$

b. Ta biến đổi biểu thức về dạng:

$$B = \frac{(5^2)^{\log_5 6} + (7^2)^{\log_7 8} - 3}{3.3^{\log_{3^2} 4} + \frac{4^2}{(2^2)^{\log_2 3}} + 5^{\log_{5^3} 3^3}} = \frac{\left(5^{\log_5 6}\right)^2 + \left(7^{\log_7 8}\right)^2 - 3}{3.\left(3^{\log_3 4}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{4^2}{\left(2^{\log_2 3}\right)^2} + 5^{\log_5 3}}$$

$$= \frac{36 + 64 - 3}{6 + \frac{16}{9} + 3} = 9.$$

c. Ta biến đổi biểu thức về dạng:

$$C = \frac{(6^2)^{\log_6 5} + \frac{10}{10^{\lg 2}} - 3^{\log_{3^2} 6^2}}{\log_2 \log_2 \sqrt{2^{\frac{1}{4}}}} = \frac{\left(6^{\log_6 5}\right)^2 + \frac{10}{2} - 3^{2.\frac{1}{2}\log_3 6}}{\log_2 \log_2 2^{\frac{1}{8}}}$$

$$= \frac{25 + 5 - 6}{\log_2 2^{-3}} = -8.$$

Ví dụ 2: Cho $m = \log_2 3$ và $n = \log_2 5$. Tính theo m, n giá trị của các biểu thức:

a. $A = \log_2 2250$.

b. $B = \log_2 \sqrt[6]{360}$.

Giải

a. Ta có

$$2250 = 2.9.125 = 2.3^2.5^3,$$

do đó:

$$A = \log_2 2250 = \log_2(2.3^2.5^3) = \log_2 2 + \log_2 3^2 + \log_2 5^3$$
$$= 1 + 2m + 3n.$$

b. Ta có

$$\sqrt[6]{360} = \sqrt[6]{5.8.9} = \sqrt{2}.\sqrt[3]{3}.\sqrt[6]{5},$$

do đó:

$$A = \log_2 \sqrt[6]{360} = \log_2(\sqrt{2}.\sqrt[3]{3}.\sqrt[6]{5}) = \log_2 \sqrt{2} + \log_2 \sqrt[3]{3} + \log_2 \sqrt[6]{5}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3}m + \frac{1}{6}n.$$

Ví dụ 3: Tìm cơ số a, biết:

a. $\log_a 4\sqrt[3]{2} = \frac{5}{6}$. b. $\log_a(3.\sqrt{3}.\sqrt[3]{3}) = -\frac{11}{12}$.

Giải

a. Ta có:

$$\log_a 4\sqrt[3]{2} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow a^{\frac{5}{6}} = 4\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{5}{3}} = 4^{\frac{5}{6}} \Rightarrow a = 4.$$

b. Ta có:

$$\log_a(3.\sqrt{3}.\sqrt[3]{3}) = -\frac{11}{12} \Leftrightarrow a^{-\frac{11}{12}} = 3.\sqrt{3}.\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{11}{6}} = 9^{\frac{11}{12}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{11}{12}}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{9}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a. $A = \log_2 4\sqrt[3]{16} - 2\log_{\frac{1}{3}} 27\sqrt[3]{3} + \dfrac{4^{2+\log_2 3}}{3^{\log_9 2 - \log_{\frac{1}{3}} 5}}$.

b. $B = 15\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2\sqrt[5]{8}} + \dfrac{81^{\log_3 5}}{27^{\log_9 36} + 3^{\log_9 2401}}$.

Bài tập 2. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a. $C = 9^{\frac{1}{\log_6 2}} + 32^{\frac{1}{\log_8 3}}$. b. $D = \left(\sqrt[\log_6 5]{25} + \sqrt[\log_8 7]{49}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Bài tập 3. Cho $m = \log_2 3$ và $n = \log_2 5$. Tính theo m, n giá trị của các biểu thức:

a. $A = \log_2 \sqrt[6]{135}$. b. $B = \log_{30} \frac{3}{10}$.

Bài tập 4. Cho $m = \log_a c$ và $n = \log_b c$. Tính theo m, n giá trị của $\log_{ab} c$.

Bài tập 5. Tìm cơ số a, biết:

a. $\log_a 8 = 2$. b. $\log_a \frac{27}{\sqrt[5]{9}} = -\frac{26}{5}$.

Bài tập 6. Xác định a, b sao cho:

$$\log_2 a + \log_2 b = \log_2(a + b).$$

Bài toán 2: Sử dụng công thức đổi cơ số.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng các kết quả trong mục 1.3.

Ví dụ 1: Chứng minh các đẳng thức sau (với giả thiết là chúng có nghĩa):

a. $\log_{ax}(bx) = \dfrac{\log_a b + \log_a x}{1 + \log_a x}$.

b. $\dfrac{1}{\log_a x} + \dfrac{1}{\log_{a^2} x} + \ldots + \dfrac{1}{\log_{a^n} x} = \dfrac{n(n+1)}{2\log_a x}$.

Giải

a. Ta có:

$$\log_{ax}(bx) = \frac{\log_a(bx)}{\log_a(ax)} = \frac{\log_a b + \log_a x}{1 + \log_a x} \text{ đpcm.}$$

b. Ta có:

$$VT = \frac{1}{\log_a x} + \frac{2}{\log_a x} + \ldots + \frac{n}{\log_a x} = \frac{1}{\log_a x}(1 + 2 + \ldots + n)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2\log_a x}, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 2: Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{4^{\frac{1}{\log_6 2}} + 3^{\frac{2}{\log_8 3}}}$.

Giải

Ta biến đổi biểu thức về dạng:

$$A = \sqrt{(2^2)^{\log_2 6} + 3^{2\log_3 8}} = \sqrt{\left(2^{\log_2 6}\right)^2 + \left(3^{\log_3 8}\right)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10.$$

Ví dụ 3: Tính giá trị các biểu thức sau:

a. $A = \log_{\sqrt{2}} \sqrt[6]{a}$ biết $\log_a 8 = \dfrac{1}{2}$.

b. $B = \log_{a^2 b} \dfrac{b^2}{\sqrt{a}}$ biết $\log_a b = 2$.

c. $C = \log_9 32$ biết $\log_2 6 = a$.

d. $D = \log_{30} 16$ biết $a = \lg 3$ và $b = \lg 5$.

Giải

a. Ta biến đổi biểu thức về dạng:

$$A = \log_{2^{\frac{1}{2}}} a^{\frac{1}{6}} = \frac{1}{3}\log_2 a = \frac{1}{3\log_a 2} = \frac{1}{\log_a 8} = 2.$$

b. Với $\log_a b = 2 \Leftrightarrow b = a^2$. Ta biến đổi biểu thức về dạng:

$$B = \log_{a^2.a^2}\frac{(a^2)^2}{a^{\frac{1}{2}}} = \log_{a^4} a^{\frac{7}{2}} = \frac{7}{8}.$$

c. Với $\log_2 6 = a \Leftrightarrow a = \log_2(2.3) = 1 + \log_2 3 \Leftrightarrow \log_2 3 = a - 1$.

Ta biến đổi biểu thức về dạng:

$$C = \log_{3^2} 2^5 = \frac{5}{2}\log_3 2 = \frac{5}{2\log_2 3} = \frac{5}{2(a-1)}.$$

d. Ta biến đổi biểu thức về dạng:

$$D = \log_{30}16 = 4\log_{30}2 = \frac{4\lg 2}{\lg 30} = \frac{4\lg\frac{10}{5}}{\lg(3.10)} = \frac{4(1-\lg 5)}{\lg 3 + 1} = \frac{4(1-b)}{a+1}.$$

Ví dụ 4: Cho $a = \log_{12}18$ và $b = \log_{24}54$. Chứng minh rằng:

$$ab + 5(a - b) = 0.$$

Giải

Ta có:

$$a = \log_{12}18 = \frac{\log_2 18}{\log_2 12} = \frac{\log_2(2.3^2)}{\log_2(2^2.3)} = \frac{1 + 2\log_2 3}{2 + \log_2 3}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 3 = \frac{1-2a}{a-2}. \qquad (1)$$

$$b = \log_{24}54 = \frac{\log_2 54}{\log_2 24} = \frac{\log_2(2.3^3)}{\log_2(2^3.3)} = \frac{1 + 3\log_2 3}{3 + \log_2 3}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 3 = \frac{1-3b}{b-3}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{1-2a}{a-2} = \frac{1-3b}{b-3} \Leftrightarrow ab + 5(a-b) = 0 \text{ đpcm.}$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Cho $0 < x_1, x_2, \dots, x_n \neq 1$. Chứng minh rằng:

$$\log_{x_1} x_2 . \log_{x_2} x_3 \dots \log_{x_{n-1}} x_n . \log_{x_n} x_1 = 1.$$

Bài tập 2. Cho $0 < x_1, x_2, \dots, x_n, a, x_1.x_2\dots x_n \neq 1$. Chứng minh rằng:

$$\log_{x_1.x_2\dots x_n} a = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\log_{x_i} a}}.$$

Bài tập 3. Chứng minh rằng với $x^2 + 4y^2 = 12xy$, $x, y > 0$ ta luôn có

$$\ln(x + 2y) - 2\ln 2 = \frac{1}{2}(\ln x + \ln y).$$

Bài tập 4. Cho $y = a^{\frac{1}{1-\log_a x}}$, $z = a^{\frac{1}{1-\log_a y}}$. Chứng minh rằng:

$$x = a^{\frac{1}{1-\log_a z}}.$$

Bài tập 5. Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbf{N}, n > 2$ luôn có:

$$n > \log_2(2n + 1).$$

Bài tập 6. Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbf{N}$ luôn $\exists k \in \mathbf{N}, k > 1$ sao cho:

$$\log_k(13^n - 1) = 1 + \log_k 6.$$

Bài tập 7. Chứng minh rằng với với $0 < a, b, c, abc \neq 1$ luôn có:

$$\log_a d.\log_b d + \log_b d.\log_c d + \log_c d.\,\log_a d = \frac{\log_a d.\log_b d.\log_c d}{\log_{abc} d}$$

Bài tập 8. Chứng minh rằng với $a^2 + b^2 = c^2$, $a, b, c > 0$, $c \pm b \neq 1$ ta luôn có:

$$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2\log_{c+b} a.\log_{c-b} a.$$

Bài tập 9. Chứng minh rằng với $\log_x a$, $\log_y b$, $\log_z c$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng ta luôn có:

$$\log_b y = \frac{2\log_a x.\log_c z}{\log_a x + \log_c z},\ 0 < a, b, c, x, y, z \neq 1.$$

Bài tập 10. Chứng minh rằng với $0 < N \neq 1$ và a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số nhân ta luôn có:

$$\frac{\log_a N}{\log_c N} = \frac{\log_a N - \log_b N}{\log_b N - \log_c N},\ 0 < a, b, c \neq 1.$$

Bài toán 3: So sánh các số có dạng logarit.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng các kết quả:

1. Với $a > 1$ thì $\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$.
2. Với $0 < a < 1$ thì $\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$.

Ví dụ 1: So sánh các số a và b, biết:

c. $a = \log_2(3 - \sqrt{2})$ và $b = \log_2 \frac{1}{3}$.

d. $a = \log_{\sqrt{2}-1} \frac{3}{4}$ và $b = \log_{\sqrt{2}-1} \frac{4}{5}$

Giải

a. Ta có: $3-\sqrt{2} > \frac{1}{3} \Rightarrow \log_2(3-\sqrt{2}) > \log_2\frac{1}{3} \Leftrightarrow a > b$.

b. Ta có: $\begin{cases} 0 < \sqrt{2}-1 < 1 \\ \frac{3}{4} < \frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \log_{\sqrt{2}-1}\frac{3}{4} > \log_{\sqrt{2}-1}\frac{4}{5} \Leftrightarrow a > b$.

Ví dụ 2: So sánh các số a và b, biết:

a. $a = \log_{2-\sqrt{3}} 2$ và $b = \log_{2+\sqrt{3}}\frac{1}{3}$. b. $a = \log_{3+2\sqrt{2}} 3$ và $b = \log_{5\sqrt{2}-7}\frac{1}{2}$.

Giải

a. Ta có: $a = \log_{2-\sqrt{3}} 2 = -\log_{2+\sqrt{3}} 2 = \log_{2+\sqrt{3}}\frac{1}{2}$,

do đó: $\begin{cases} 2+\sqrt{3} > 1 \\ \frac{1}{2} > \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \log_{2+\sqrt{3}}\frac{1}{2} > \log_{2+\sqrt{3}}\frac{1}{3} \Leftrightarrow a > b$.

b. Ta có:

$$a = \log_{3+2\sqrt{2}} 3 = \log_{(\sqrt{2}+1)^2} 3 = \frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}+1} 3 = \log_{\sqrt{2}+1}\sqrt{3},$$

$$b = \log_{5\sqrt{2}-7}\frac{1}{2} = \log_{(\sqrt{2}-1)^3}\frac{1}{2} = \log_{(\sqrt{2}+1)^{-3}}\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{3}\log_{\sqrt{2}+1} 2 = \log_{\sqrt{2}+1}\sqrt[3]{2}$$

do đó:

$$\begin{cases} \sqrt{2}+1 > 1 \\ \sqrt{3} > \sqrt[3]{2} \end{cases} \Rightarrow \log_{\sqrt{2}+1}\sqrt{3} > \log_{\sqrt{2}+1}\sqrt[3]{2} \Leftrightarrow a > b.$$

Ví dụ 3: So sánh các số a và b, biết:

a. $a = \log_2 3$ và $b = \log_3\frac{1}{2}$. b. $a = \log_{\frac{1}{2}}\frac{3}{4}$ và $b = \log_{\frac{3}{4}} 2$.

Giải

a. Ta có:

$$a = \log_2 3 > \log_2 2 = 1 \text{ và } b = \log_3\frac{1}{2} < \log_3 3 = 1 \Rightarrow a > b.$$

b. Ta có:

$$\frac{1}{2} < \frac{3}{4} < 1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}\frac{3}{4} > \log_{\frac{3}{4}}\frac{3}{4} > \log_{\frac{3}{4}} 2 \Leftrightarrow a > b.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. So sánh các số a và b, biết:

a. $a = \log_3 4$ và $b = \log_4 \frac{1}{3}$.   b. $a = \log_{\frac{2}{3}} \frac{3}{5}$ và $b = \log_{\frac{3}{5}} \frac{3}{2}$.

b. $a = 2^{\log_6 3}$ và $b = 3^{\log_6 \frac{1}{2}}$.

Bài tập 2. Nhận xét gì về cơ số a, biết:

a. $\log_a(x^2 + 1) > \log_a(x + 1)$.   b. $\log_a(x^2 - 1) > \log_a(4x - 4)$.

Bài tập 3. Chứng minh rằng $\log_n(n + 1) > \log_{n+1}(n + 2)$, với mọi số nguyên $n > 1$.

Bài tập 4. Cho $y = 2^{x^2}$ và $z = 2^{y^2}$. Chứng minh rằng $x^2 = \frac{1}{2}\log_2(\log_2 z)$.

Bài toán 4: Tìm tập xác định của hàm số có chứa logarit.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Xét hàm số $y = \log_{f_1(x)}[f_2(x)]$.

Để tìm tập xác định D của hàm số ta đi giải điều kiện:

$$\begin{cases} f_1(x) \text{ có nghĩa và } 0 < f_1(x) \neq 1 \\ f_2(x) \text{ có nghĩa và } f_2(x) > 0 \end{cases}.$$

Ví dụ 1: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \log_{x+3}(2x - 1)$.   b. $y = \log_{x^2-1}(x + 1)$.

Giải

a. Hàm số có nghĩa khi: $\begin{cases} 0 < x + 3 \neq 1 \\ 2x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x \neq -2 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$.

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = (\frac{1}{2}, +\infty)$.

b. Hàm số có nghĩa khi: $\begin{cases} 0 < x^2 - 1 \neq 1 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < |x| \neq \pm\sqrt{2} \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \neq \sqrt{2}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (1, +\infty)\backslash\{\sqrt{2}\}$.

Ví dụ 2: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

$$y = \log_{x^2+1} \frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{x}$$

Giải

Hàm số có nghĩa khi:

$$\begin{cases} 0 < x^2 + 1 \neq 1 \\ 1 - 4x^2 \geq 0 \\ x \neq 0 \\ \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2} \leq x < 0 \\ 0 < x \leq \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{x} > 0 \quad (1) \end{cases}.$$

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \dfrac{(1 - \sqrt{1 - 4x^2})(1 + \sqrt{1 - 4x^2})}{x(1 + \sqrt{1 - 4x^2})} > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{4x}{1 + \sqrt{1 - 4x^2}} > 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

Kết hợp với điều kiện đang xét được nghiệm là $0 < x \leq \dfrac{1}{2}$.

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = [-\dfrac{1}{2}.\ \dfrac{1}{2}]\backslash\{0\}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \log_2(x - 1)^2$. b. $y = \log_4|x + 2|$.

b. (ĐHCSNN – 1999) $y = \sqrt{x^2 + x - 2}\,\log_3(9 - x^2)$.

Bài tập 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \dfrac{1}{\log_3 x - 1}$.

b. $\log_3 \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 - x - 2}}$.

c. $y = \log_2[4|2x - 1|(x^2 - x + 1) - x^3 + 6x^2 - 15x + 14]$

d. $y = \log_2[x - \sqrt{x^2 - |x|}]$

Bài tập 3. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \log_2[\sqrt{2 - |\log_2 x|} - \log_2 x]$ b. $y = \ln[x^4 - 8e^{x-1} > x(x^2e^{x-1} - 8)]$

c. $y = \lg[\cos(\lg x)]$. d. $y = \lg(1 - 2\cos x)$.

Bài tập 4. Cho hàm số: $y = \dfrac{\sqrt{(m + 1)x - m}}{\log_a(mx - m + 2)}$, với $0 < a \neq 1$.

a. Tìm miền xác định của hàm số khi $m = -\dfrac{1}{2}$.

b. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số xác định với mọi $x \geq 1$.

Bài toán 5: Tìm giới hạn của hàm số logarit.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Chúng ta sử dụng giới hạn dạng:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1.$$

Ví dụ 1: Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin 2x}$.

b. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^9}$.

Giải.

a. Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{3}{2}.\dfrac{\ln(1+3x)}{3x}.\dfrac{2x}{\sin 2x}\right]=\dfrac{3}{2}$.

b. Ta có: $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^9}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{9x^8}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{9x^9}=0$.

Ví dụ 2: Tính giới hạn: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$, với $b\neq 0$.

Giải.

Ta có: $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\ln[1+(\cos ax-1)]}{\cos ax-1}}{\dfrac{\ln[1+(\cos bx-1)]}{\cos bx-1}}.\frac{\cos ax-1}{\cos bx-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin^2\frac{ax}{2}}{\left(\frac{ax}{2}\right)^2}}{\dfrac{\sin^2\frac{bx}{2}}{\left(\frac{bx}{2}\right)^2}}.\frac{\left(\frac{ax}{2}\right)^2}{\left(\frac{bx}{2}\right)^2}=\frac{a^2}{b^2}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(ax+1)}{x}$, với $a\neq 0$.

b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$.

Bài tập 2. Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[\mathrm{tg}\left(ax+\frac{\pi}{4}\right)\right]}{\sin bx}$.

b. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln[\cos(\pi.2^x)]}{\sin^2(\pi.2^x)}$.

Bài tập 3. Tính giới hạn: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$.

Bài tập 4. (ĐHGTVT – 2001): Tính giới hạn: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-2x^2}-\sqrt[3]{1+x^2}}{\ln(1+x^2)}$.

Bài toán 6: Xét tính liên tục của hàm số logarit tại điểm x_0.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Khẳng định rằng hàm số xác định tại điểm x_0, tính $f(x_0)$.

Bước 2: Xác định $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Bước 3: Kiểm nghiệm $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Bước 4: Kết luận.

Ví dụ 1: Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm $x_0 = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+3x)}{\sin 2x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}.$$

Giải

Hàm số xác định với mọi $x\in\mathbf{R}$ nên xác định tại điểm $x_0 = 0$ và $f(0) = 1$.

Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{3}{2}.\frac{\ln(1+3x)}{3x}.\frac{2x}{\sin 2x}\right] = \frac{3}{2}.$$

Vậy $f(0) \neq \lim\limits_{x\to 0} f(x)$, do đó hàm số gián đoạn tại điểm $x_0 = 0$.

Ví dụ 2: Xác định a để hàm số liên tục trên $(0, +\infty)$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x - 1}{x - e} & \text{khi } 0 < x \neq e \\ a & \text{khi } x = e \end{cases}.$$

Giải

Để hàm số liên tục trên $(0, +\infty)$ điều kiện cần và đủ là nó liên tục tại điển $x_0 = e$.

Hàm số xác định tại điểm $x_0 = e$ và $f(e) = a$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to e} f(x) = \lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x - 1}{x - e} = \frac{1}{e}$.

Vậy, để hàm số liên tục trên $(0, +\infty)$ điều kiện là $a = \frac{1}{e}$.

CHƯƠNG V

PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ MŨ

CHỦ ĐỀ 1

PHƯƠNG TRÌNH MŨ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Định nghĩa: Phương trình mũ là phương trình chứa ẩn ở số mũ của luỹ thừa.

II. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Bài toán 1: Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương .

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta sử dụng phép biến đổi tương đương sau:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\text{hoặc } a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ (a-1)[f(x) - g(x)] = 0 \end{cases}.$$

Ví dụ 1: Cho phương trình: $2^{4x^3 - m} = \dfrac{1}{8^x}$, với $|m| > 1$.

a. Giải phương trình với $m = 7$.

b. Chứng tỏ rằng với $|m| > 1$ phương trình luôn có nghiệm duy nhất, từ đó hãy xác định nghiệm.

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2^{4x^3 - m} = 2^{-3x} \Leftrightarrow 4x^3 - m = -3x \Leftrightarrow 4x^3 + 3x = m. \qquad (1)$$

a. Với $m = 7$, ta được: $4x^3 + 3x - 7 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(4x^2 + 4x + 7) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy, với $m = 7$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

b. Giả sử x_0 là nghiệm của phương trình, khi đó:

- Với $x > x_0$ thì : $\begin{cases} 4x^3 > 4x_0^3 \\ 3x > 3x_0 \end{cases} \Leftrightarrow 4x^3 + 3x > 4x_0^3 + 3x_0 = m$

$\Rightarrow x > x_0$ phương trình vô nghiệm

- Với $x < x_0$ thì :

$$\begin{cases} 4x^3 < 4x_0^3 \\ 3x < 3x_0 \end{cases} \Leftrightarrow 4x^3 + 3x < 4x_0^3 + 3x_0 = m$$

$\Rightarrow x < x_0$ phương trình vô nghiệm

Vậy (1) nếu có nghiệm x_0 thì nghiệm đó là duy nhất.

Để xác định nghiệm của phương trình, đặt :

$$a = \sqrt[3]{m + \sqrt{m^2 + 1}} \text{ và } \alpha = \frac{1}{2}(a - \frac{1}{a}),$$

ta được: $4\alpha^3 + 3\alpha = m \Leftrightarrow x = \alpha$ là nghiệm của phương trình.

Vậy với $|m| > 1$ phương trình có nghiệm duy nhất :

$$x = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{m + \sqrt{m^2 + 1}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{m^2 + 1}}).$$

Nhận xét: Trong các lời giải trên ta thấy ngay $\frac{1}{8} = 2^{-3}$, từ đó được phương tình có dạng:

$$a^{f(x)} = a^{\alpha} \Leftrightarrow f(x) = \alpha,$$

tuy nhiên trong nhiều trường hợp với phương trình:

$$a^{f(x)} = b^{g(x)}$$

ta cần chọn phần tử trung gian c để biến đổi phương trình về dạng:

$$(c^{\alpha})^{f(x)} = (c^{\beta})^{g(x)} \Leftrightarrow c^{\alpha f(x)} = c^{\beta g(x)} \Leftrightarrow \alpha f(x) = \beta g(x).$$

Để minh hoạ chúng ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 2: Cho phương trình:

$$8^{mx^3 - 2x^2 + 3x - 2} = 4^{mx^2 + x - 2}. \quad (1)$$

a. Giải phương trình với m = 1.

b. Tìm m để phương trình có ba nghiệm phân biệt.

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(2^3)^{mx^3 - 2x^2 + 3x - 2} = (2^2)^{mx^2 + x - 2}$$

$$\Leftrightarrow 3(mx^3 - 2x^2 + 3x - 2) = 2(mx^2 + x - 2)$$

$$\Leftrightarrow 3mx^3 - 2(m + 3)x^2 + 7x - 2 = 0 \Leftrightarrow (3x - 2)(mx^2 - 2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - 2 = 0 \\ f(x) = mx^2 - 2x + 1 = 0 \ (2) \end{array}\right.$$

a. Với m = 1, ta được:

$$\left[\begin{array}{l} 3x-2=0 \\ x^2-2x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{3} \\ x=1 \end{array}\right..$$

Vậy, với m = 1 phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = \frac{2}{3}$, $x = 1$.

b. Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt khác $\frac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta'_{(2)} > 0 \\ f(\frac{2}{3}) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 1-m>0 \\ \dfrac{4m}{9}-\dfrac{4}{3}+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty, 1)\setminus\{0, \frac{3}{4}\}.$$

Vậy, với $m \in (-\infty, 1)\setminus\{0, \frac{3}{4}\}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Nhận xét:

1. Trong lời giải trên với phương trình:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

ta sử dụng kết quả " *Nếu a, b, c, d nguyên và phương trình có nghiệm hữu tỷ* $\frac{p}{q}$ *thì p, q theo thứ tự là ước của d và a* " để đoán nhận được nghiệm $x = \frac{2}{3}$, từ đó phân tích phương trình trở thành

$$(3x - 2)(mx^2 - 2x + 1) = 0.$$

2. Trong các ví dụ trên cơ số a của hàm số số mũ là một hằng số, ví dụ tiếp theo minh hoạ cho trường hợp cơ số a phụ thuộc biến số hoặc tham số.

Ví dụ 3: Giải và biện luận phương trình:

$$(x-2)^{x^2+2x} = |x-2|^a.$$

Giải

Điều kiện:

$$x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2. \qquad (1)$$

Phương trình tương đương với:

$$(x-2)^{x^2+2x} = (x-2)^a \Leftrightarrow (x-2-1)(x^2+2x-a) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x^2 + 2x - a = 0 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 3$ với mọi a.

Xét phương trình:

$$x^2 + 2x - a = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = a + 1. \qquad (*)$$

Khi đó, ta biện luận:

- Nếu $a + 1 < 0 \Leftrightarrow a < -1$, phương trình vô nghiệm.
- Nếu $a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -1$, phương trình có nghiệm $x = -1$ (loại vì không thoả mãn (1)).
- Nếu $a + 1 > 0 \Leftrightarrow a > -1$, phương trình có hai nghiệm

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = -1 + \sqrt{a+1} \\ x_2 = -1 - \sqrt{a+1} \ \text{(l)} \end{array}\right.$$

Ta có:

$$x_1 = -1 + \sqrt{a+1} > 2 \Leftrightarrow \sqrt{a+1} > 3 \Leftrightarrow a > 8.$$

Tóm lại:

- Với $a \le 8$ phương trình có nghiệm $x = 3$.
- Với $a > 8$ phương trình có hai nghiệm $x = 3$ và $x = -1 + \sqrt{a+1}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các phương trình:

a. $2^{2x^2-5x-1} = \frac{1}{8}$.

b. $16^{\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}} = 0{,}25.\ 2^{\frac{3x+7}{x^2-4}}$.

c. $32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0{,}25.\ 128^{\frac{x+17}{x-3}}$.

Bài tập 2: Giải các phương trình:

a. $(x+2)^{\sqrt{x-3}} = 1$.

b. $\sqrt[4]{x^x} = x^{\sqrt[4]{x}}$.

c. $x^{\frac{2\sqrt{x-1}-3}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}}} = x$.

Bài tập 3: Giải các phương trình:

a. $(x-2)^{2x^2-3x+2} = (x-2)^{x^2+3x-6}$.

b. $(x-3)^{3x^2-5x+2} = (x^2-6x+9)^{x^2+x-4}$.

c. $(3+2x-x^2)^{\sqrt{3}\sin x} = (3+2x-x^2)^{1-\cos x}$.

d. $(2+x-x^2)^{\sin x} = (2+x-x^2)^{2-\sqrt{3}\cos x}$.

Bài tập 4: Cho phương trình: $3^{x^2-4x+5} = 9^m$.

a. Giải phương trình với m = 1.

b. Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

Bài tập 5: Giải và biện luận phương trình: $(x^2+1)^{1+\sqrt{x+2}} = (x^2+1)^{a-\sqrt{x+2}}$.

Bài tập 6: Giải và biện luận phương trình:

$$(x-m)^{2x^2-2mx+1} = (x^2-2mx+m^2)^{x^2+x-1}.$$

Bài toán 2: Phương pháp logarit hoá và đưa về cùng cơ số .

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để chuyển ẩn số khỏi số mũ luỹ thừa người ta có thể logarit theo cùng một cơ số cả hai vế của phương trình, ta có các dạng:

Dạng 1: Phương trình:

$$a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1, b > 0 \\ f(x) = \log_a b \end{cases}.$$

Dạng 2: Phương trình:

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).\log_a b$$

hoặc $\log_b a^{f(x)} = \log_b b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x).\log_b a = g(x)$.

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a. $2^{x^2-4} = 3^{x-2}$. b. $2^{3^x} = 3^{2^x}$.

Giải

a. Lấy logarit cơ số 2 hai vế phương trình, ta được:

$$\log_2 2^{x^2-4} = \log_2 3^{x-2} \Leftrightarrow x^2 - 4 = (x-2)\log_2 3$$
$$\Leftrightarrow x^2 - x\log_2 3 + 2\log_2 3 - 4 = 0,$$

ta có $\Delta = \log_2^2 3 - 8\log_2 3 + 16 = (\log_2 3 - 4)^2$ phương trình có nghiệm

$$x = \frac{\log_2 3 \pm (4 - \log_2 3)}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \log_2 3 - 2 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 2 hoặc $x = \log_2 3 - 2$.

b. Lấy logarit cơ số 10 hai vế của phương trình, ta được:

$$\lg 2^{3^x} = \lg 3^{2^x} \Leftrightarrow 3^x\lg 2 = 2^x\lg 3 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{\lg 3}{\lg 2} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{3}{2}} \log_2 3.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \log_{\frac{3}{2}} \log_2 3$.

Chú ý:

1. Có thể logarit theo cơ số bất kỳ cả hai vế. Trong ví dụ trên a) ta đã lựa chọn cơ số 2 cho tiện.
2. Phương pháp logarit hoá tỏ ra rất hiệu lực khi hai vế phương trình có dạng tích các luỹ thừa.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $5^x.8^{\frac{x-1}{x}} = 500$.

Giải

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$5^x.8^{\frac{x-1}{x}} = 500 \Leftrightarrow 5^x.2^{3.\frac{x-1}{x}} = 5^3.2^2 \Leftrightarrow 5^{x-3}.2^{\frac{x-3}{x}} = 1.$$

Lấy logarit cơ số 2 hai vế, ta được:

$$\log_2(5^{x-3}.2^{\frac{x-3}{x}}) = 0 \Leftrightarrow \log_2(5^{x-3}) + \log_2(2^{\frac{x-3}{x}}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\log_2 5 + \frac{x-3}{x}\log_2 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(\log_2 5 + \frac{1}{x}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -\dfrac{1}{\log_2 5} = -\log_5 2 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm.

Chú ý: Đối với một số phương trình cần thiết rút gọn trước khi logarit hoá.

Ví dụ 3: Giải phương trình:

$$2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 3^x + 3^{x+2} + 3^{x+4}.$$

Giải.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2^x(1+2+4) = 3^x(1+9+81) \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{91}{7} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{2}{3}}\frac{91}{7}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = \log_{\frac{2}{3}}\frac{91}{7}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các phương trình:

a. $2^{x^2} = 3^{x-1}$.

b. $8^{\frac{x}{x+2}} = 4.3^{4-x}$.

c. $3^{x-2}.5^{x-1}.7^x = 245$.

d. $2^x.3^{x-1}.5^{x-2} = 12$.

Bài tập 2: Giải các phương trình:

a. $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+3} = 3^x + 3^{x+3} - 3^{x+1}$.

b. $2^{\frac{1}{x}}(\sqrt{x^2+4} - x - 2) = 4\sqrt{x^2+4} - 4x - 8$.

Bài toán 3: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 1.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Phương pháp dùng ẩn phụ dạng 1 là việc sử dụng một ẩn phụ để chuyển phương trình ban đầu thành một phương trình với một ẩn phụ.

Ta lưu ý các phép đặt ẩn phụ thường gặp sau:

Dạng 1: Phương trình $\alpha_k a^{kx} + \alpha_{k-1}a^{(k-1)x} + ... + \alpha_1 a^x + \alpha_0 = 0$,

khi đó đặt $t = a^x$, điều kiện $t > 0$, ta được:

$$\alpha_k t^k + \alpha_{k-1}t^{k-1} + ... + \alpha_1 t + \alpha_0 = 0.$$

Mở rộng: Nếu đặt $t = a^{f(x)}$, điều kiện hẹp $t > 0$. Khi đó:

$$a^{2f(x)} = t^2,\ a^{3f(x)} = t^3, ..., a^{kf(x)} = t^k \text{ và } a^{-f(x)} = \frac{1}{t}.$$

Dạng 2: Phương trình $\alpha_1 a^x + \alpha_2 b^x + \alpha_3 = 0$, với $a.b = 1$

khi đó đặt $t = a^x$, điều kiện $t > 0$, suy ra $b^x = \frac{1}{t}$, ta được:

$$\alpha_1 t + \frac{\alpha_2}{t} + \alpha_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 t^2 + \alpha_3 t + \alpha_2 = 0.$$

Mở rộng: Với $a.b = 1$ thì khi đặt $t = a^{f(x)}$, điều kiện hẹp $t > 0$, suy ra $b^{f(x)} = \frac{1}{t}$.

Dạng 3: Phương trình $\alpha_1 a^{2x} + \alpha_2 (ab)^x + \alpha_3 b^{2x} = 0$,

khi đó chia hai vế của phương trình cho $b^{2x} > 0$ (hoặc a^{2x}, $(a.b)^x$), ta được:

$$\alpha_1\left(\frac{a}{b}\right)^{2x} + \alpha_2\left(\frac{a}{b}\right)^{x} + \alpha_3 = 0$$

Đặt $t = \left(\frac{a}{b}\right)^x$, điều kiện $t > 0$, ta được:

$$\alpha_1 t^2 + \alpha_2 t + \alpha_3 = 0.$$

Mở rộng: Với phương trình mũ có chứa các nhân tử: a^{2f}, b^{2f}, $(a.b)^f$, ta thực hiện theo các bước sau:

- Chia hai vế của phương trình cho $b^{2f} > 0$ (hoặc a^{2f}, $(a.b)^f$).
- Đặt $t = \left(\frac{a}{b}\right)^f$, điều kiện hẹp $t > 0$.

Dạng 4: Lượng giác hoá.

Chú ý: Ta sử dụng ngôn từ *điều kiện hẹp* $t > 0$ cho trường hợp đặt $t = a^{f(x)}$ vì:

- Nếu đặt $t = a^x$ thì $t > 0$ là điều kiện đúng.
- Nếu đặt $t = 2^{x^2+1}$ thì $t > 0$ chỉ là điều kiện hẹp, bởi thực chất điều kiện cho t phải là $t \geq 2$. Điều này đặc biệt quan trọng cho lớp các bài toán có chứa tham số.

Ví dụ 1: Cho phương trình:

$$(m+3).16^x + (2m-1).4^x + m + 1 = 0. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với $m = -\frac{3}{4}$.

b. Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

Giải

Đặt $t = 4^x$, $t > 0$, khi đó phương trình có dạng:

$$(m+3)t^2 + (2m-1)t + m + 1 = 0. \qquad (2)$$

a. Với $m = -\frac{3}{4}$, ta được:

$$9t^2 - 10t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \frac{1}{9} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4^x = 1 \\ 4^x = \frac{1}{9} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \log_4 \frac{1}{9} = -\log_2 3 \end{array}\right..$$

Vậy, với $m = -\frac{3}{4}$ phương trình có hai nghiệm $x = 0$, $x = -\log_2 3$.

b. Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu, tức là:

$x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow 4^{x_1} < 4^0 < 4^{x_2} \Leftrightarrow t_1 < 1 < t_2$

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thoả mãn $t_1 < 1 < t_2$

$\Leftrightarrow af(1) < 0 \Leftrightarrow (m+3)[(m+3).1^2 + (2m-1).1 + m + 1] < 0$

$\Leftrightarrow -3 < m < -\frac{3}{4}$.

Vậy, với $-3 < m < -\frac{3}{4}$ phương trình có nghiệm thoả mãn điều kiện đầu bài.

Nhận xét: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên để chuyển từ điều kiện (1) có hai nghiệm trái dấu sang điều kiện cho phương trình (2) theo t chúng ta đã thực hiện phép mũ hoá, đó chính là phương pháp quan trọng để thiết lập điều kiện.

Ví dụ 2: Cho phương trình:

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + m\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với $m = 1$.

b. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn:

$$x_1 - x_2 = \log_{2+\sqrt{3}} 3.$$

Giải

Nhận xét rằng

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right).\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right) = \sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = 1.$$

Do đó, nếu đặt $t = \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x$, điều kiện $t > 0$, thì:

$$(\sqrt{2-\sqrt{3}}\,)^x = \frac{1}{t}.$$

Khi đó, phương trình tương đương với:

$$t + \frac{m}{t} = 4 \Leftrightarrow t^2 - 4t + m = 0. \qquad (2)$$

a. Với m = 1, ta được:

$$t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2+\sqrt{3} \\ t = 2-\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = 2+\sqrt{3} \\ (\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = 2-\sqrt{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2+\sqrt{3})^{\frac{x}{2}} = 2+\sqrt{3} \\ (2+\sqrt{3})^{\frac{x}{2}} = (2+\sqrt{3})^{-1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2} = 1 \\ \frac{x}{2} = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right..$$

Vậy, với m = 1 phương trình có hai nghiệm x = ± 2.

b. Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$\Rightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 tương ứng:

$$t_1 = (\sqrt{2+\sqrt{3}}\,)^{x_1} \text{ và } t_2 = (\sqrt{2+\sqrt{3}}\,)^{x_2}.$$

Vì $x_1 - x_2 = \log_{2+\sqrt{3}} 3$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2+\sqrt{3}}\,)^{x_1-x_2} = (2+\sqrt{3})^{\log_{2+\sqrt{3}} 3} \Leftrightarrow \frac{t_1}{t_2} = 3 \Leftrightarrow t_1 = 3t_2.$$

Vậy, để (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1 - x_2 = \log_{2+\sqrt{3}} 3$

$\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt $t_1, t_2 > 0$ thoả mãn $t_1 = 3t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \\ t_1 = 3t_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m > 0 \\ t_1 + t_2 = 4 > 0 \\ t_1.t_2 = m > 0 \\ t_1 = 3t_2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$$

Vậy, với m = 3 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý: Trong một số trường hợp ta không thấy ngay được sự xuất hiện a.b = 1 đối với các toán tử của phương trình, khi đó cần có đánh giá tinh tế hơn. Cụ thể ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 3: Giải phương trình:

$$(7 + 4\sqrt{3}\,)^x - 3(2 - \sqrt{3}\,)^x + 2 = 0.$$

Giải

Nhận xét rằng:

$$7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3}\,)^2 \text{ và } (2 + \sqrt{3}\,).(2 - \sqrt{3}\,) = 1.$$

Do đó, nếu đặt $t = (2 + \sqrt{3})^x$, điều kiện $t > 0$, thì:

$$(2 - \sqrt{3})^x = \frac{1}{t} \text{ và } (7 + 4\sqrt{3})^x = t^2.$$

Khi đó, phương trình tương đương với:

$$t^2 - \frac{3}{t} + 2 = 0 \Leftrightarrow t^3 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t^2 + t + 3) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

$$\Leftrightarrow (2 + \sqrt{3})^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 0$.

Nhận xét: Như vậy, trong ví dụ trên bằng việc đánh giá

$$7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2 \text{ và } (2 + \sqrt{3}).(2 - \sqrt{3}) = 1$$

ta đã lựa chọn được ẩn phụ $t = (2 + \sqrt{3})^x$ cho phương trình.

Ví dụ tiếp theo chúng ta sẽ miêu tả việc lựa chọn ẩn phụ thông qua đánh giá mở rộng của $a.b = 1$, đó là:

$$a.b = c^2 \Leftrightarrow \frac{a}{c}.\frac{b}{c} = 1,$$

tức là với các phương trình có dạng:

$$A.a^x + B.b^x + C.c^x = 0.$$

Khi đó ta thực hiện phép chia cả hai vế của phương trình cho $c^x \neq 0$, để nhận được:

$$A.\left(\frac{a}{c}\right)^x + B.\left(\frac{b}{c}\right)^x + C = 0,$$

từ đó thiết lập ẩn phụ $t = \left(\frac{a}{c}\right)^x$, $t > 0$ và suy ra $\left(\frac{b}{c}\right)^x = \frac{1}{t}$.

Ví dụ 4: Giải và biện luận phương trình:

$$(3 + \sqrt{5})^x + a(3 - \sqrt{5}.)^x = 2^{x+3}. \qquad (1)$$

Giải

Chia hai vế của phương trình cho $2^x > 0$, ta được:

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x + a\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x = 8. \qquad (2)$$

Nhận xét rằng:

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x.\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}.\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x = 1,$$

do đó, nếu đặt $t = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x$, điều kiện $t > 0$, thì $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x = \frac{1}{t}$.

Khi đó, phương trình tương đương với:

$$t^2 - 8t + a = 0 \Leftrightarrow (t-4)^2 = -a + 16. \qquad (*)$$

1. Nếu $-a + 16 < 0 \Leftrightarrow a > 16$, phương trình vô nghiệm.
2. Nếu $-a + 16 = 0 \Leftrightarrow a = 16$, phương trình có nghiệm $t = 4$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x = 4 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} 4.$$

3. Nếu $-a + 16 > 0 \Leftrightarrow a < 16$, phương trình có hai nghiệm

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 4 + \sqrt{16-a} \\ t_2 = 4 - \sqrt{16-a} \end{array}\right..$$

(3.1). Nếu $0 < a < 16$ thì cả hai nghiệm t_1, t_2 đều thoả mãn điều kiện $t > 0$, khi đó:

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x = 4 \pm \sqrt{16-a} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}(4 \pm \sqrt{16-a}).$$

(3.2). Nếu $a \le 0$ thì nghiệm t_1 thoả mãn điều kiện $t > 0$, khi đó:

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x = 4 + \sqrt{16-a} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}(4 + \sqrt{16-a}).$$

Kết luận:

- Với $a \le 0$, phương trình có nghiệm $x = \log_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}(4 + \sqrt{16-a})$.
- Với $0 < a < 16$, phương trình có hai nghiệm $x = \log_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}(4 \pm \sqrt{16-a})$.
- Với $a = 16$, phương trình có nghiệm $x = \log_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} 4$.
- Với $a > 16$, phương trình vô nghiệm.

Chú ý: Tiếp theo chúng ta sẽ quan tâm tới các phương trình có dạng:

$$\alpha_1 a^{2x} + \alpha_2 (ab)^x + \alpha_3 b^{2x} = 0.$$

Ví dụ 5: Cho phượng trình:

$$2.4^{x^2+1} + m.6^{x^2+1} = 9^{x^2+1}. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với $m = 1$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất.

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2.2^{2(x^2+1)} + m(2.3)^{x^2+1} = 3^{2(x^2+1)}. \qquad (2)$$

Chia cả hai vế của phương trình cho $2^{2(x^2+1)}\neq 0$, ta được:

$$2+m\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2+1}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2(x^2+1)}. \qquad (3)$$

Đặt $t=\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2+1}$, điều kiện $t\geq\frac{3}{2}$ vì $x^2+1\geq 1\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2+1}\geq\left(\frac{3}{2}\right)^1=\frac{3}{2}$.

Khi đó, phương trình (3) tương đương với:

$$f(t)=t^2-mt-2=0. \qquad (4)$$

a. Với m = 1, ta được:

$$t^2-t-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\ t=-1\ (l)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2+1}=2$$

$$\Leftrightarrow x^2+1=\log_{3/2}2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\log_{\frac{3}{2}}2-1}$$

Vậy, với m = 1 phương trình có hai nghiệm $x=\pm\sqrt{\log_{\frac{3}{2}}2-1}$.

b. Để phương trình (1) có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \text{(4) có nghiệm } t_1, t_2 \text{ thoả mãn } t_1\leq t_2=\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{3}{2}\right)=0\ (\text{vì a.c} = -2<0)\Leftrightarrow\frac{9}{4}-\frac{3m}{2}-2=0\Leftrightarrow m=\frac{1}{6}.$$

Vậy, với $m=\frac{1}{6}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý: Tiếp theo chúng ta sẽ quan tâm tới việc sử dụng các phép biến đổi đại số để làm xuất hiện ẩn phụ hoặc sử dụng ẩn phụ cho tổ hợp đối xứng.

Ví dụ 6: Giải phương trình:

$$2^{2x^2+1}-9.2^{x^2+x}+2^{2x+2}=0.$$

Giải

Chia cả hai vế của phương trình cho $2^{2x+2}\neq 0$, ta được:

$$2^{2x^2-2x-1}-9.2^{x^2-x-2}+1=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}.2^{2x^2-2x}-\frac{9}{4}.2^{x^2-x}+1=0$$

$$\Leftrightarrow 2.2^{2x^2-2x}-9.2^{x^2-x}+4=0.$$

Đặt $t=2^{x^2-x}$, điều kiện $t>0$.

Khi đó, phương trình tương đương với:

$$2t^2 - 9t + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x^2-x} = 2^2 \\ 2^{x^2-x} = 2^{-1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x = 2 \\ x^2 - x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right. .$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = -1$, $x = 2$.

Chú ý: Trong ví dụ trên, vì bài toán không có tham số nên ta đã sử dụng điều kiện cho ẩn phụ chỉ là $t > 0$ và chúng ta đã thấy với $t = \frac{1}{2}$ vô nghiệm. Do vậy nếu bài toán có chứa tham số chúng ta cần xác định điều kiện đúng cho ẩn phụ như sau:

$$x^2 - x = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{x^2-x} \geq 2^{-\frac{1}{4}} \Leftrightarrow t \geq \frac{1}{\sqrt[4]{2}}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các phương trình:

a. $25^x + 10^x = 2^{2x+1}$.

b. $6.9^x - 13.6^x + 6.4^x = 0$.

c. $4.3^x - 9.2^x = 5.6^{x/2}$.

d. $125^x + 50^x = 2^{3x+1}$.

e. $2^{2x} + 2^{3-4x} = 6$.

f. $\frac{7^{2x}}{100^x} = 6.(0,7)^x + 7$.

g. $3^{\sqrt{x}} - 3^{1-\sqrt{x}} + 4 = 0$.

Bài tập 2: Giải các phương trình:

a. $4.3^{3x} - 3^{x+1} = \sqrt{1 - 9^x}$.

b. $2^{3x} - 6.2^x - \frac{1}{2^{3(x-1)}} + \frac{12}{2^x} = 1$.

c. $(\sqrt{7 + 4\sqrt{3}})^{\sin x} + (\sqrt{7 - 4\sqrt{3}})^{\sin x} = 4$.

d. $(5 + \sqrt{24})^x + (5 - \sqrt{24})^x = 10$.

e. $(2 + \sqrt{3})^x + (7 + 4\sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^x = 4(2 + \sqrt{3})$.

Bài tập 3: Giải các phương trình:

a. $4^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 2 + \sqrt{2}$.

b. $81^{\sin^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30$.

c. $9^{\sin^2 x} + 9^{\cos^2 x} = 10$.

d. $4^{\operatorname{cotg}^2 x} + 2^{\sin^{-2} x} - 3 = 0$.

Bài tập 4: Giải và biện luận các phương trình:

a. $4.3^x - 3 + m = 3^{2x}$.

b. $m.3^x + m.3^{-x} = 8$.

c. $(m - 2).2^x + m.2^{-x} + m = 0$.

d. $(m - 2).2^x + (m - 5).2^{-x} - 2(m + 1) = 0$.

Bài tập 5: Xác định m để các phương trình sau có nghiệm:

a. $(m-1).3^{2x}+2(m-3).3^{x}+m+3=0.$

b. $(m-4).4^{x}-2(m-2).2^{x}+m-1=0.$

Bài tập 6: Cho phương trình: $2^{2x+1}-2^{x+3}-2m=0.$

a. Giải phương trình với $m = 32$.

b. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Bài tập 7: Cho phương trình: $m.16^{x}+2.81^{x}=5.36^{x}.$

a. Giải phương trình với $m = 3$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất.

Bài tập 8: Cho phương trình: $4^{x}-m.2^{x+1}+2m=0.$

a. Giải phương trình khi $m = 2$.

b. Tìm m để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1 + x_2 = 3$.

Bài tập 9: Cho phương trình:

$$(m-2).2^{2(x^2+1)}-2(m+1).2^{x^2+1}+2m-6=0.$$

a. Giải phương trình với $m = 9$.

b. Xác định m để phương trình có nghiệm.

Bài tập 10: Cho phương trình:

$$(3+2\sqrt{2})^{tgx}+(3-2\sqrt{2})^{tgx}=m.$$

a. Giải phương trình với $m = 6$.

b. Tìm m để phương trình có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

Bài toán 4: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 2.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Phương pháp dùng ẩn phụ dạng 2 là việc sử dụng một ẩn phụ chuyển phương trình ban đầu thành một phương trình với một ẩn phụ nhưng các hệ số vẫn còn chứa x.

Phương pháp này thường được sử dụng đối với những phương trình khi lựa chọn ẩn phụ cho một biểu thức thì các biểu thức còn lại không biểu diễn được triệt để qua ẩn phụ đó hoặc nếu biểu diễn được thì công thức biểu diễn lại quá phức tạp.

Khi đó thường ta được một phương trình bậc hai theo ẩn phụ (hoặc vẫn theo ẩn x) có biệt số Δ là một số chính phương.

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$9^{x^2} + (x^2 - 3)\,3^{x^2} - 2x^2 + 2 = 0. \qquad (1)$$

Giải

Đặt $t = 3^{x^2}$, điều kiện $t \geq 1$ vì

$x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 3^{x^2} \geq 3^0 = 1.$

Khi đó, phương trình tương đương với:

$t^2 + (x^2 - 3).t - 2x^2 + 2 = 0$

$\Delta = (x^2 - 3)^2 - 4(-2x^2 + 2) = (x^2 + 1)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 1 - x^2 \end{array}\right.$.

Khi đó:

- Với $t = 2 \Leftrightarrow 3^{x^2} = 2 \Leftrightarrow x^2 = \log_3 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\log_3 2}$.
- Với $t = 1 - x^2 \Leftrightarrow 3^{x^2} = 1 - x^2$, ta có nhận xét:

$$\begin{cases} VT \geq 1 \\ VP \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} VT = 1 \\ VP = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x^2} = 1 \\ 1 - x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm $x = \pm\sqrt{\log_3 2}$, $x = 0$.

Chú ý: Một mở rộng khá tự nhiên của phương pháp đặt ẩn phụ kiểu này là chúng ta có thể sử dụng ngay các hằng số hoặc các tham số trong phương trình để làm ẩn phụ, phương pháp này có tên gọi là " *Phương pháp hằng số biến thiên* ", để minh hoạ chúng ta có hai ví sau:

Ví dụ 2: Giải phương trình:

$$4^{2x} + 2^{3x+1} + 2^{x+3} - 16 = 0.$$

Giải.

a. Đặt $t = 2^x$, điều kiện $t > 0$, ta được:

$t^4 + 2t^3 + 8t - 16 = 0 \Leftrightarrow 4^2 - 2t.4 - t^4 - 2t^3 = 0.$

Đặt $u = 4$, ta được:

$u^2 - 2t.u - t^4 - 2t^3 = 0$

ta xét phương trình bậc hai theo u, được :

$\Delta' = t^2 + t^4 + 2t^3 = t^2(t + 1)^2.$

Suy ra:

$$\left[\begin{array}{l} u = t - t(t+1) \\ u = t + t(t+1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4 = -t^2 \\ 4 = t^2 + 2t \end{array}\right. \Leftrightarrow t^2 + 2t - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1-\sqrt{5} \\ t = -1+\sqrt{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow 2^x = \sqrt{5} - 1 \Leftrightarrow x = \log_2(\sqrt{5} - 1).$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \log_2(\sqrt{5} - 1)$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải phương trình:

a. $9^x + .2(x-2)3^x + 2x - 5 = 0$.   b. $3^{2x} - (2^x + 9).3^x + 9.2^x = 0$.

c. $3^{2x} + \sqrt{3^x + 5} = 5$.

Bài tập 2: Cho phương trình: $3^{3x} + 2m.3^{2x} + m^2.3^x + m - 1 = 0$

a. Giải phương trình với $m = 1 + \sqrt{2}$.

b. Xác định m để phương trình có ba nghiệm phân biệt.

Bài tập 3: Cho phương trình:

$$m^2.2^{3x} - 3m.2^{2x} + (m^2 + 2).2^x - m = 0, m \neq 0.$$

a. Giải phương trình với $m = 2$.

b. Xác định m để phương trình có ba nghiệm phân biệt.

Bài toán 5: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 3.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Phương pháp dùng ẩn phụ dạng 3 sử dụng hai ẩn phụ cho hai biểu thức mũ trong phương trình và khéo léo biến đổi phương trình thành phương trình tích.

Ví dụ 1: Cho phương trình:

$$m.2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2.2^{6-5x} + m. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với $m = 1$.

b. Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Giải

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$m.2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2^{7-5x} + m$$

$$\Leftrightarrow m.2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2^{(x^2-5x+6)+(1-x^2)} + m$$

$$\Leftrightarrow m.2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2^{x^2-5x+6}.2^{1-x^2} + m.$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = 2^{x^2-5x+6} \\ v = 2^{1-x^2} \end{cases}, u,v > 0.$$

Khi đó, phương trình tương đương với:

$$mu + v = uv + m \Leftrightarrow (u-1)(v-m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 1 \\ v = m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x^2-5x+6} = 1 \\ 2^{1-x^2} = m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x+6 = 0 \\ 2^{1-x^2} = m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 2 \\ 2^{1-x^2} = m \quad (*) \end{array}\right..$$

Vậy, với mọi m phương trình luôn có hai nghiệm $x = 3$, $x = 2$.

a. Với $m = 1$, phương trình (*) có dạng :

$$2^{1-x^2} = 1 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Vậy, với $m = 1$ phương trình có bốn nghiệm phân biệt $x = 3$, $x = 2$, $x = \pm 1$.

b. Để (1) có 4 nghiệm phân biệt ⇔ (*) có hai nghiệm phân biệt khác 2 và 3.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 1 - x^2 = \log_2 m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ x^2 = 1 - \log_2 m \end{cases}.$$

Khi đó điều kiện là:

$$\begin{cases} m > 0 \\ 1 - \log_2 m > 0 \\ 1 - \log_2 m \neq 4 \\ 1 - \log_2 m \neq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < 2 \\ m \neq 1/8 \\ m \neq 1/256 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (0, 2)\backslash\{\frac{1}{8}, \frac{1}{256}\}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các phương trình:

a. $4^{x^2+x} + 2^{1-x^2} = 2^{(x+1)^2} + 1.$

b. $8.3^x + 3.2^x = 24 + 6^x.$

c. $4^{x^2-3x+2} + 4^{x^2+6x+5} = 4^{2x^2+3x+7} + 1.$

Bài tập 2: Giải và biện luận các phương trình:

a. $9^{x^2-2x+m} - 3^{x^2+2m-3} = 3^{(x-2)^2-1} - 1.$

b. $4^{x^2+x+m} - 2^{x^2+2m-1} = 2^{(x+1)^2} - 1.$

Bài toán 6: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 4.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Phương pháp dùng ẩn phụ dạng 4 là việc sử dụng k ẩn phụ chuyển phương trình ban đầu thành một hệ phương trình với k ẩn phụ.

Trong hệ mới thì k – 1 phương trình nhận được từ các mối liên hệ giữa các đại lượng tương ứng.

Trường hợp đặc biệt là việc sử dụng 1 ẩn phụ chuyển phương trình ban đầu thành một hệ phương trình với 1 ẩn phụ và 1 ẩn x, khi đó Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện có nghĩa cho các biểu thức trong phương trình.

Bước 2: Biến đổi phương trình về dạng:

$$f[x, \varphi(x)] = 0$$

Bước 3: Đặt $y = \varphi(x)$, ta biến đổi phương trình thành hệ:

$$\begin{cases} y = \varphi(x) \\ f(x, y) = 0 \end{cases}.$$

Chú ý:

1. Các hệ thu được thông thường là các hệ đối xứng.
2. Ở đây chúng sẽ đi xem xét hai dạng toán cơ bản:

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$2^{2x} - \sqrt{2^x + 6} = 6. \qquad (1)$$

Giải

Đặt $u = 2^x$, điều kiện $u > 0$.

Khi đó phương trình được chuyển thành:

$$u^2 - \sqrt{u + 6} = 6. \qquad (2)$$

Đặt $v = \sqrt{u + 6}$, điều kiện $v \ge \sqrt{6}$

$$\Rightarrow v^2 = u + 6. \qquad (3)$$

Khi đó, phương trình được chuyển thành hệ:

$$\begin{cases} u^2 = v + 6 \\ v^2 = u + 6 \end{cases} \Rightarrow u^2 - v^2 = -(u - v)$$

$$\Leftrightarrow (u - v)(u + v + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u - v = 0 \\ u + v + 1 = 0 \end{array}\right..$$

- Với u = v, ta được:

$$u^2 - u - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 3 \\ u = -2\ (l) \end{array}\right. \Leftrightarrow 2^x = 3 \Leftrightarrow x = 8.$$

- Với $u + v + 1 = 0$, ta được

$$u^2 + u - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = \dfrac{-1+\sqrt{21}}{2} \\ u = \dfrac{-1-\sqrt{21}}{2} \ (l) \end{array}\right. \Leftrightarrow 2^x = \frac{\sqrt{21}-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \log_2 \frac{\sqrt{21}-1}{2}.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 8$ và $x = \log_2 \frac{\sqrt{21}-1}{2}$.

Chú ý: Phương trình có thể được giải bằng phương pháp hằng số biến thiên.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải phương trình:

$$\frac{8}{2^{x-1}+1} + \frac{2^x}{2^x+2} = \frac{18}{2^{x-1}+2^{1-x}+2}.$$

Bài tập 2: Giải phương trình:

a. $3^{2x} + \sqrt{3^x+5} = 5$.

b. $27^x + 2 = 3\sqrt[3]{3^{x+1}-2}$.

Bài toán 7: Sử dụng tính chất liên tục của hàm số.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Cho phương trình $f(x) = 0$, để chứng minh phương trình có k nghiệm phân biệt trong $[a, b]$, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chọn các số $a < T_1 < T_2 < \ldots < T_{k-1} < b$ chia đoạn $[a, b]$ thành k khoảng thoả mãn:

$$\begin{cases} f(a).f(T_1) < 0 \\ \ldots \\ f(T_{k-1}).f(b) < 0 \end{cases}.$$

Bước 2: Kết luận.

Ví dụ 1: Cho phương trình:

$$2^{3x+1} - 3.2^{x+1} + 1 = 0. \quad (1)$$

Chứng minh rằng phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt và chúng nhỏ hơn 1.

Giải

Đặt $t = 2^x$, $t > 0$, ta được :

$$2t^3 - 6t + 1 = 0. \quad (2)$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 - 6t + 1$ liên tục trên $\mathbf{R}$.

Ta có: $f(-2) = -11$, $f(0) = 1$, $f(1) = -3$, $f(2) = 13$

suy ra:

$f(-2)f(0) = -11 < 0$, (2) có 1 nghiệm $t_0 \in (-2, 0)$, loại vì $t > 0$.

$f(0)f(1) = -3 < 0$, (2) có 1 nghiệm $t_1 \in (0, 1)$.

$f(1)f(2) = -39 < 0$, (2) có 1 nghiệm $t_2 \in (1, 2)$.

Vậy ta được :

$$0 < t_1 < t_2 < 2 \Leftrightarrow 0 < 2^{x_1} < 2^{x_2} < 2 \Leftrightarrow x_1 < x_2 < 1.$$

Vậy, phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt và chúng nhỏ hơn 1.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Chứng minh rằng với mọi a, b phương trình sau luôn có ít nhất một nghiệm:

$$3^{3x} + a.3^{2x+b} + b.3^{x+a} - 1 = 0.$$

Bài tập 2: Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm với mọi m:

$$3^x - 4^{-x} = m.$$

Bài toán 8: Sử dụng tính chất đơn điệu của hàm số.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng các tính chất của hàm số để giải phương trình là dạng toán khá quen thuộc. Ta có ba hướng áp dụng sau:

Hướng 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình về dạng:

$$f(x) = k. \quad (1)$$

Bước 2: Xét hàm số $y = f(x)$

Dùng lập luận khẳng định hàm số đơn điệu (giả sử đồng biến).

Bước 3: Nhận xét:

- Với $x = x_0 \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) = k$, do đó $x = x_0$ là nghiệm
- Với $x > x_0 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0) = k$, do đó phương trình vô nghiệm
- Với $x < x_0 \Leftrightarrow f(x) < f(x_0) = k$, do đó phương trình vô nghiệm

Vậy $x = x_0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Hướng 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình về dạng:

$$f(x) = g(x). \quad (2)$$

Bước 2: Xét hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$

Dùng lập luận khẳng định hàm số $y = f(x)$ là đồng biến còn hàm số $y = g(x)$ là hàm hằng hoặc nghịch biến.

Xác định x_0 sao cho $f(x_0) = g(x_0)$

Bước 3: Vậy phương trình có nghiệmduy nhất $x = x_0$.

Hướng 3: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình về dạng:

$$f(u) = f(v). \tag{3}$$

Bước 2: Xét hàm số $y = f(x)$

Dùng lập luận khẳng định hàm số đơn điệu (giả sử đồng biến).

Bước 3: Khi đó:

$$(3) \Leftrightarrow u = v \text{ với } \forall u, v \in D_f.$$

Ví dụ 1: Cho phương trình: $3^x - 4^{-x} = m$

Chứng minh rằng với mọi m phương trình luôn có duy nhất nghiệm.

Giải

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = 3^x - 4^{-x}$ với đường thẳng $y = m$.

Xét hàm số $y = 3^x - 4^{-x}$, xác định trên $D = \mathbf{R}$.

Nhận xét rằng:

- Hàm số $y = 3^x$ là hàm đồng biến.
- Hàm số $y = 4^{-x} = \dfrac{1}{4^x}$ là hàm nghịch biến.

Do có hàm số $y = 3^x - 4^{-x}$ đồng biến.

Giới hạn :

$$\lim_{x\to-\infty} y = -\infty, \lim_{x\to+\infty} y = +\infty$$

Vậy với mọi m phương trình luôn có duy nhất nghiệm.

Chú ý: Nếu bài toán chỉ yêu cầu "*CMR phương trình $3^x - 4^{-x} = m$ luôn có nghiệm với mọi m*" thì ta sẽ sử dụng tính chất liên tục của hàm số để giải, cụ thể:

Xét hàm số $y = 3^x - 4^{-x}$ liên tục trên **R**.

Ta có:

$$\lim_{x\to-\infty} y = -\infty, \text{ vậy tồn tại } a < 0 \text{ để } f(a) < 0.$$

$$\lim_{x\to+\infty} y = +\infty, \text{ vậy tồn tại } b > 0 \text{ để } f(b) > 0.$$

$\Rightarrow f(a).f(b) < 0 \Leftrightarrow$ phương trình luôn có nghiệm $x_0 \in (a, b)$.

Vậy với mọi m phương trình luôn có nghiệm.

Ví dụ 2: Giải phương trình:

$$x + 2.3^{\log_2 x} = 3. \tag{1}$$

Giải.

Điều kiện $x > 0$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2.3^{\log_2 x} = 3 - x. \tag{2}$$

- Vế phải của phương trình là một hàm nghịch biến.
- Vế trái của phương trình là một hàm đồng biến.

Do vậy, nếu phương trình có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Nhận xét rằng $x = 1$ là nghiệm của phương trình (2) vì

$$2.3^{\log_2 1} = 3 - 1.$$

Vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Chú ý: Hầu hết phương trình được giải bằng phương pháp này ở dạng ban đầu đều không đưa ra được nhận xét " *VT đồng biến còn VP là hàm hằng hoặc nghịch biến* " khi đó cần thực hiện một vài phép biến đổi đại số, thí dụ với phương trình:

$$A.a^{f(x)} + B.b^{g(x)} = C.c^{h(x)} \Leftrightarrow A.\frac{a^{f(x)}}{c^{h(x)}} + B.\frac{b^{g(x)}}{c^{h(x)}} = C.$$

Để minh hoạ chúng ta xem xét ví dụ sau:

Ví dụ 3: Giải phương trình:

$$1 + 8^{x/2} = 3^x.$$

Giải

Chia hai vế phương trình cho $2^x \neq 0$, ta được:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{8}}{3}\right)^x = 1. \tag{1}$$

- Vế trái của phương trình là một hàm nghịch biến.
- Vế phải của phương trình là một hàm hằng.

Vậy, $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Chú ý: Nhiều bài toán cần sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ để chuyển chúng về dạng $f(x) = k$. Từ đó mới có thể áp dụng được phương pháp hàm số để giải.

Ví dụ 4: Giải và biện luận phương trình:

$$5^{x^2+2mx+2} - 5^{2x^2+4mx+m+2} = x^2 + 2mx + m.$$

Giải

Đặt $t = x^2 + 2mx + 2$, phương trình có dạng:

$$5^t + t = 5^{2t+m-2} + 2t + m - 2 \tag{1}$$

Xét hàm số $f(t) = 5^t + t$.

- Miền xác định $D = \mathbf{R}$.
- Hàm số đồng biến trên D (bởi nó là tổng của hai hàm số đồng biến).

Vậy:

$$(1) \Leftrightarrow f(t) = f(2t + m - 2) \Leftrightarrow t = 2t + m - 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2mx + m = 0. \qquad (2)$$

ta có:

$$\Delta' = m^2 - m.$$

- Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m^2 - m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1$.

  Phương trình (2) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm.
- Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = 1$.
  - Với $m = 0$ phương trình (2) có nghiệm kép $x_0 = 0$.
  - Với $m = 1$ phương trình (2) có nghiệm kép $x_0 = -1$.
- Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < 0 \end{array}\right.$.

Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = -m \pm \sqrt{m^2 - m}$, đó cũng là nghiệm của (1).

Kết luận:

- Với $m = 0$, phương trình có nghiệm kép $x = 0$.
- Với $m = 1$, phương trình có nghiệm kép $x_0 = -1$.
- Với $0 < m < 1$, phương trình vô nghiệm.
- Với $m > 1$ hoặc $m < 0$, phương trình có hai nghiệm:

$$x_{1,2} = -m \pm \sqrt{m^2 - m}.$$

Ví dụ 5: Cho phương trình:

$$3^{x^2 + 2ax + 4a - 3} - 2 = \left|\frac{a - 2}{x + a}\right|. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với $a = 0$.

b. Hãy tìm a sao cho phương trình trên có đúng 2 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-4, 0]$.

Giải

Điều kiện $x \neq -a$.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$3^{(x+a)^2 - (a-2)^2 + 1} - 2 = \left|\frac{a - 2}{x + a}\right|.$$

Đặt $t = |x + a|$, $t > 0$, ta được:

$$3^{t^2-(a-2)^2+1} - 2 = \frac{|a-2|}{t} \qquad (2)$$

Nhận xét rằng:

- Hàm số $f(t) = 3^{t^2-(a-2)^2+1} - 2$ đồng biến với $t > 0$.
- Hàm số $g(t) = \frac{|a-2|}{t}$ nghịch biến với $t > 0$.
- $f(|a-2|) = g(|a-2|)$

Vậy (2) có duy nhất nghiệm

$$t = |a-2| \Leftrightarrow |x+a| = |a-2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 2-2a \end{array}\right..$$

a. Với $a = 0$, ta được nghiệm $x = \pm 2$.

b. Để (1) có đúng hai nghiệm phân biệt trên đoạn $[-4, 0]$ điều kiện là:

$$\begin{cases} -4 \le 2-2a \le 0 \\ 2-2a \ne 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le a \le 3 \\ a \ne 2 \end{cases}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các phương trình:

a. $3^x + x - 4 = 0$.

b. $3^x + 4^x = 5^x$.

c. $15^{\frac{x}{2}} + 1 = 4^x$.

Bài tập 2: Giải các phương trình:

a. $3^{2x-3} + (3x-10).3^{x-2} + 3 - x = 0$.

b. $3.4^x + (3x-10).2^x + 3 - x = 0$.

c. $x^2 + (2^x - 3)x + 2(1-2^x) = 0$.

d. $2^{2x-1} + 3^{2x} + 5^{2x+1} = 2^x + 3^{x+1} + 5^{x+2}$.

e. $2^{3x} + 3x.2^{2x} + (1+3x^2).2^x + x - 2 = 0$.

f. $-2^{x^2-x} + 2^{x-1} = (x-1)^2$.

Bài tập 3: Giải phương trình:

a. $e^{|2x-5|} - e^{|x-1|} = \frac{1}{|2x-5|} - \frac{1}{|x-1|}$.

b. $\log_3(\sqrt{x^2-3x+2} + 2) + \left(\frac{1}{5}\right)^{3x-x^2-1} = 2$.

Bài tập 4: Giải phương trình:

$$2^{m^2x+6} - 2^{4x+3m} = (4-m^2)x + 3m - 6.$$

Bài toán 9: Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Phương pháp điều kiện cần và đủ thường tỏ ra khá hiệu quả cho lớp dạng toán " *Tìm điều kiện tham số để:*

Dạng 1: *Phương trình có nghiệm duy nhất .*

Dạng 2: *Phương trình có nghiệm với mọi giá trị của một tham số.*

Dạng 3: *Phương trình nghiệm đúng với mọi* $x \in D$.

Dạng 4: *Phương trình tương đương với một phương trình hoặc một bất phương trình khác.*

Khi đó ta thực hiện theo các bước:

Bước1: Đặt điều kiện để các biểu thức của phương trình có nghĩa.

Bước2: Tìm *điều kiện cần* cho hệ dựa trên việc đánh giá hoặc tính đối xứng của hệ.

Bước3: Kiểm tra *điều kiện đủ*, trong bước này cần có được một số kỹ năng cơ bản.

Ví dụ 1: Tìm m để phương trình sau nghiệm đúng với $\forall x > 0$:

$$m.2^{3x} + 3^{\log_{m+3} x} = x. \qquad (1)$$

Giải

Điều kiện cần: Giả sử (1) có nghiệm $\forall x > 0 \Rightarrow x = 1$ là nghiệm của (1), khi đó:

$(1) \Leftrightarrow 8m + 1 = 1 \Leftrightarrow m = 0$·

Đó chính là điều kiện cần để phương trình nghiệm đúng với $\forall x > 0$.

Điều kiện đủ: Với m = 0, khi đó (1) có dạng:

$$3^{\log_3 x} = x \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x = x \text{ luôn đúng.}$$

Vậy, với m = 0 phương trình nghiệm đúng với $\forall x > 0$.

Ví dụ 2: Tìm m để 2 phương trình sau tương đương:

$$9^{x^2} + 3^{x^2+1} - 4 = 0. \qquad (1)$$

$$|m - 4|.2^{x} - {}^{2} + m.4 - {}^{1} = 1. \qquad (2)$$

Giải

- Giải (1), bằng cách đặt $t = 3^{x^2}$, ta được nghiệm x = 0.

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất x = 0 do đó (1) và (2) tương đương khi và chỉ khi (2) có đúng một nghiệm x = 0.

Điều kiện cần: Giả sử (2) có nghiệm là x = 0 suy ra

$$|m - 4|.2 - {}^{2} + m.4 - {}^{1} = 1 \Leftrightarrow |m - 4| + m = 4 \Leftrightarrow |m - 4| = 4 - m$$

$$\Leftrightarrow m - 4 \le 0 \Leftrightarrow m \le 4$$

Đó chính là điều kiện cần để 2 phương trình tương đương.

Điều kiện đủ: Giả sử $m \le 4$, đặt $t = 2^x$, điều kiện $t > 0$ khi đó (2) có dạng:

$$(4 - m)t + mt^2 = 4 \Leftrightarrow mt^2 + (4 - m)t - 4 = 0. \qquad (3)$$

- Với $m = 0$

$$(3) \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$ là nghiệm duy nhất của phương trình .

Vậy $m = 0$ thì (1) và (2) tương đương.

- Với $0 \ne m \le 4$ thì:

$$(3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\dfrac{4}{m} \end{array}\right. .$$

Vậy để (1) và (2) tương đương.thì:

$$\left[\begin{array}{l} -\dfrac{4}{m} = 1 \\ -\dfrac{4}{m} < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -4 \\ m > 0 \end{array}\right. \xleftrightarrow{0 \ne m \le 4} \left[\begin{array}{l} m = -4 \\ 0 < m \le 4 \end{array}\right. .$$

Vậy, với $0 \le m \le 4$ hoặc $m = -4$ thì (1) và (2) tương đương.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\frac{1}{3^{|x-2|}} = 2m - 1.$$

Bài tập 2: Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$2^{mx(2-x)} = 3^{|x-1|} + m.$$

Bài tập 3: Tìm m để phương trình sau nghiệm đúng với $\forall x > 0$:

$$\sqrt{2^{\log_{m+1} x^2}} = x.$$

Bài tập 4: Tìm m để 2 phương trình sau tương đương:

$$4^{x+1} + 2^{x+4} = 2^{x+2} + 16,$$

$$|m - 9|.3^{x-2} + m.9^{x-1} = 1.$$

Bài toán 10: Sử dụng phương pháp đánh giá.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Đánh giá tinh tế dựa trên:

a. Tam thức bậc hai.

b. Các bất đẳng thức cơ bản, như Côsi, Bunhiacôpxki,...

c. Tính chất trị tuyệt đối.

...

Từ đó, ta có thể nhanh chóng chỉ ra được nghiệm của nó.

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$(x^2+1)^{\sqrt{x-1}} = (x^2+2)^{x^2+x-2}.$$

Giải

Điều kiện $x \geq 1$. (*)

Với điều kiện (*), ta có nhận xét:

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} \geq 0 \\ x^2+1 > 1 \end{cases} \Rightarrow \text{VT} = (x^2+1)^{\sqrt{x-1}} \geq (x^2+1)^0 = 1.$$

$$\begin{cases} x^2+x-2 \leq 0 \\ x^2+2 > 1 \end{cases} \Rightarrow \text{VP} = (x^2+2)^{x^2+x-2} \leq (x^2+2)^0 = 1.$$

Suy ra phương trình đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases} \text{VT} = 1 \\ \text{VP} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = 0 \\ x^2+x-2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 1$.

Ví dụ 2: Giải phương trình:

$$3^{\frac{25x+3}{5}} - 5.3^{3x} + 2\sqrt[5]{27} = 0.$$

Giải

Đặt $t = 3^x$, điều kiện $t > 0$, khi đó phương trình có dạng:

$$t^5.\sqrt[5]{27} - 5.t^3 + 2\sqrt[5]{27} = 0 \Leftrightarrow t^2 + \frac{2}{t^3} = \frac{5}{\sqrt[5]{27}}.$$

Nhận xét rằng:

$$\text{VT} = \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^3} \overset{\text{Côsi}}{\geq} 5\sqrt[5]{\left(\frac{1}{3}t^2\right)^3.\frac{1}{t^6}} = \frac{5}{\sqrt[5]{27}}.$$

Vậy phương trình tương đương với:

$$\frac{1}{3}t^2 = \frac{1}{t^3} \Leftrightarrow t = \sqrt[5]{3} \Leftrightarrow 3^x = 3^{\frac{1}{5}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{5}$.

Chú ý: Một bất đẳng thức khá quan trọng thường được áp dụng khi giải phương trình mũ bằng phương pháp đánh giá là bất đẳng thức Bernouli:

Với mọi $t > 0$, ta luôn có:

$$\begin{cases} t^\alpha + (1-t)\alpha \geq 1, \ \forall \alpha \leq 0 \vee \alpha \geq 1 \\ t^\alpha + (1-t)\alpha \leq 1, \ \forall \alpha \in [0,1] \end{cases}.$$

Do đó với phương trình mũ dạng:

$$a^x + x(1-a) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ x = 0 \vee x = 1 \end{cases}.$$

Các ví dụ sau sẽ minh hoạ việc sử dụng bất đẳng thức này.

Ví dụ 3: Giải phương trình:

$$4^{x^2} = (2x^2 - x + 1)2^x.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2^{2x^2-x} = 2x^2 - x + 1 \Leftrightarrow 2^{2x^2-x} + (1-2)(2x^2-x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2 - x = 0 \\ 2x^2 - x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1/2. \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có bốn nghiệm $x = 0$, $x = \pm\frac{1}{2}$, $x = 1$.

Ví dụ 4: Giải các phương trình sau: $3^x + 2^x = 3x + 2$.

Giải

Theo bất đẳng thức Bernouli ta có:

- Với $x \ge 1 \vee x \le 0$

$$\begin{cases} 3^x \ge 2x + 1 \\ 2^x \ge x + 1 \end{cases} \Rightarrow 3^x + 2^x \ge 3x + 2,$$

dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 0 \vee x = 1$.

- Với $x \in (0, 1)$

$$\begin{cases} 3^x < 2x + 1 \\ 2^x < x + 1 \end{cases} \Rightarrow 3^x + 2^x < 3x + 2 \Rightarrow \text{phương trình vô nghiệm}$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 0$ và $x = 1$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các phương trình:

a. $3^{x^2} = \cos 2x.$

b. $(x+1)^{\sqrt{x}} = (2x+1)^{-x}.$

c. $(2x-1)^{x^2-x} = (2-x)^{\sqrt{x-1}}.$

d. $2^{1-\sin^2 x} = (2+x^2)^{1+x}.$

Bài tập 2: Giải các phương trình:

a. $\sqrt[4]{16-x^2} = 2^x + 2^{-x}.$

b. $3^{x^2-1} + (x^2-1).3^{x+1} = 1.$

c. $\sqrt{5^x - 2x} - \sqrt{2x+1} = 1 + 4x + 4x.5^x + 5^{2x}.$

Bài tập 3: Giải các phương trình:

a. $\dfrac{2^x}{2^{2x}+2^{3x}}+\dfrac{2^{2x}}{2^{3x}+2^x}+\dfrac{2^{3x}}{2^x+2^{2x}}=\dfrac{3}{2}$.

b. $\dfrac{2^x}{4^x+m^2}+\dfrac{4^x}{m^2 2^x+1}+\dfrac{1}{2^x+m^2 4^x}=\dfrac{3}{m^2+1}$.

c. $\dfrac{2^x}{4^x+1}+\dfrac{4^x}{2^x+1}+\dfrac{1}{2^x+4^x}=\dfrac{3}{2}$.

Bài tập 4: Giải các phương trình:

a. $3^x = 2x + 1$.

b. $27^{x^2} = (6x^2 - 4x + 1).9^x$.

c. $3^x + 5^x = 6x + 2$.

d. $7^{|x|} + 3^{|x|} = 8x + 2$.

e. $9^{|x|} + 3^{|x|} = 10x + 2$.

f. $2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 3$.

CHỦ ĐỀ 2

BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Định nghĩa: Bất phương trình mũ là bất phương trình chứa ẩn ở số mũ của luỹ thừa.

II. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Bài toán 1: Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta sử dụng các phép biến đổi tương đương sau:

Dạng 1: Với bất phương trình:

$$a^{f(x)} < a^{g(x)}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \end{array}\right. \text{ hoặc } \begin{cases} a > 0 \\ (a-1)[f(x) - g(x)] < 0 \end{cases}.$$

Dạng 2: Với bất phương trình:

$$a^{f(x)} \le a^{g(x)}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \\ a = 1 \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \end{array}\right. \text{ hoặc } \begin{cases} a > 0 \\ (a-1)[f(x) - g(x)] \le 0 \end{cases}.$$

Chú ý: Cần lưu ý tới giá trị của cơ số a đối với các bất phương trình mũ.

Ví dụ 1: Cho bất phương trình:

$$3^{m(m-x)} < 3^{x+m+6}.$$

a. Giải bất phương trình với m = 0.

b. Tìm m để bất phương trình có tập nghiệm là $(0, +\infty)$.

Giải

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$m(m-x) > x + m - 6 \Leftrightarrow f(x) = (m+1)x - m^2 + m + 6 > 0. \qquad (1)$$

a. Với m = 0, ta được:

$$x + 6 > 0 \Leftrightarrow x > -6.$$

Vậy, với m = 0 bất phương trình có nghiệm $(-6, +\infty)$.

b. Bất phương trình có tập nghiệm là $(0, +\infty)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=0\\ f(0)>0\end{cases}\\ \begin{cases}a>0\\ f(0)\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m+1=0\\ -m^2+m+6>0\end{cases}\\ \begin{cases}m+1>0\\ -m^2+m+6\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1\\ \begin{cases}m>-1\\ -2\le m\le 3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow -1\le m\le 3.$$

Vậy, với $-1 \le m \le 3$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Nhận xét:

1. Như vậy, ví dụ trên đã minh hoạ dạng biến đổi tương đương thứ nhất trong trường hợp $a = 3 > 1$ và để thực hiện được các đòi hỏi a) và b) các em học sinh cần nhớ lại kiến thức cơ bản của dấu nhị thức bậc nhất trên một miền.
2. Ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ cho trường hợp cơ số $0 < a < 1$.

Ví dụ 2: Cho bất phương trình:

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{x^2+1} > (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{3x-m}. \qquad (1)$$

a. Giải bất phương trình với $m = 1$.

b. Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in (0, 2)$.

Giải

Vì $(\sqrt{3}-\sqrt{2}) < 1$ nên bất phương trình tương đương với:

$$x^2 + 1 < 3x - m \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 3x + 1 + m < 0. \qquad (2)$$

a. Với $m = 1$, ta được:

$$x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

Vậy, với $m = 1$ nghiệm của bất phương trình là $1 < x < 2$.

b. Để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in (0, 2)$

$\Leftrightarrow f(x) < 0, \forall x \in (0, 2)$

$\Leftrightarrow f(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1 \le 0 < 2 \le x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a.f(0)\le 0\\ a.f(2)\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1+m\le 0\\ 4-6+1+m\le 0\end{cases} \Leftrightarrow m \le -1.$$

Vậy, với $m \le 1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý: Ví dụ tiếp theo chúng ta sẽ quan tâm tới việc sử dụng cơ số chung gian để chuyển bất phương trình về cùng cơ số.

Ví dụ 3: Giải các bất phương trình:

$$(\sqrt{10}+3)^{\frac{x-3}{x-1}} < (\sqrt{10}-3)^{\frac{x+1}{x+3}}.$$

Giải

Nhận xét rằng:

$$(\sqrt{10}+3)(\sqrt{10}-3) = 1 \Rightarrow \sqrt{10}-3 = (\sqrt{10}+3)^{-1}.$$

Khi đó bất phương trình được viết lại dưới dạng:

$$(\sqrt{10}+3)^{\frac{x-3}{x-1}} < (\sqrt{10}+3)^{-\frac{x+1}{x+3}} \Leftrightarrow (\sqrt{10}+3)^{\frac{x-3}{x-1}+\frac{x+1}{x+3}} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{x-1} + \frac{x+1}{x+3} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-5}{(x-1)(x+3)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 < x < -\sqrt{5} \\ 1 < x < \sqrt{5} \end{array}\right. .$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $(-3, -\sqrt{5}) \cup (1, \sqrt{5})$.

Chú ý: Ví dụ tiếp theo chúng ta sẽ quan tâm tới các bất phương trình mà cơ số có chứa ẩn hoặc tham số.

Ví dụ 4: Giải bất phương trình:

$$(x-3)^{2x^2-7x} > 1.$$

Giải

Biến đổi tương đương bất phương trình về dạng:

$$(x-3)^{2x^2-7x} > (x-3)^0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 > 0 \\ (x-3-1)(2x^2-7x) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ (x-4)(2x^2-7x) > 0 \quad (*) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3 < x < \frac{7}{2} \\ x > 4 \end{array}\right. .$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \in (3, \frac{7}{2}) \cup (4, +\infty)$.

Chú ý: Trong kết quả trên để nhận được nghiệm của bất phương trình (*) ta sử dụng bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		$\frac{7}{2}$		4		$+\infty$
VT		−	0	+	0	−	0	+	

dựa trên nguyên tắc:

"*Phương trình bậc k có k nghiệm phân biệt thì miền ngoài cùng cùng dấu với hệ số bậc cao nhất và sau đó đan dấu*".

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1. Giải các bất phương trình:

a. $\frac{1}{2^{|2x+1|}} \geq \frac{1}{2^{3x+1}}$.

b. $\frac{1}{2^{\sqrt{x^2-2x}}} \leq 2^{x-1}$.

Bài tập 2. Giải các bất phương trình:

a. $(x^2-3)^{x^2+2x} > |3-x^2|^8$.

b. $(x^2-1)^{x^2+2x} > |x^2-1|^3$.

Bài tập 3. Giải các bất phương trình:

a. $(x^2 - 2x + 1)^{\frac{x-1}{x+1}} \geq 1.$

b. $\sqrt[4]{x^x} \leq x^{\sqrt[4]{x}}.$

Bài tập 4. Cho bất phương trình: $2^{m^2x+1} \geq 2^{m+(3m-2)x}$.

a. Giải bất phương trình với m = 2.

b. Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

c. Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in [0, 1]$.

Bài tập 5. Cho bất phương trình:

$$(\sqrt{2} - 1)^{(m+1)x^2+3m} \leq (\sqrt{2} + 1)^{2(1-m)x-3}.$$

a. Giải bất phương trình với m = 0.

b. Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Bài tập 6. Giải và biện luận bất phương trình:

$$(m + 3)^{4x^2+m\sqrt{1+m}} < (m^2 + 6m + 9)^{(m+\sqrt{1+m})x}.$$

Bài toán 2: Phương pháp logarit hoá và đưa về cùng cơ số.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để chuyển ẩn số khỏi số mũ luỹ thừa người ta có thể logarit theo cùng một cơ số cả hai vế của bất phương trình mũ. Chúng ta lưu ý các trường hợp cơ bản sau cho các bất phương trình mũ:

Dạng 1: Với bất phương trình:

$$a^{f(x)} < b \text{ (với } b > 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ f(x) < \log_a b \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > \log_a b \end{cases} \end{array}\right..$$

Dạng 2: Với bất phương trình:

$$a^{f(x)} > b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b \leq 0 \\ f(x) \text{ có nghĩa} \end{cases} \\ \begin{cases} b > 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > \log_a b \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) < \log_a b \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right..$$

Dạng 3: Với bất phương trình:

$$a^{f(x)} > b^{g(x)} \Leftrightarrow \lg a^{f(x)} > \lg b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x).\lg a > g(x).\lg b$$

hoặc có thể sử dụng logarit theo cơ số a hay b.

Ví dụ 1: Giải bất phương trình:

$$2^x > 5^x.$$

Giải

Cách 1: Lấy logarit cơ số 2 hai vế bất phương trình, ta được:

$$\log_2 2^x > \log_2 5^x \Leftrightarrow x > x\log_2 5$$

$$\Leftrightarrow x(\log_2 5 - 1) < 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < 0$.

Cách 2: Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương:

$$2^x > 5^x \Leftrightarrow \frac{5^x}{2^x} < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^x < 1 \Leftrightarrow x < 0.$$

Chú ý:

1 Trong lời giải cách 1 các em học sinh phải biết rằng $\log_2 5 - 1 > 0$.

2 Cũng có thể lấy logarit cơ số 5 hai vế bất phương trình, tuy nhiên để tiện so sánh các biểu thức Loga tốt nhất ta lấy theo cơ số 10, như sau :

$$\lg 2^x > \lg 5^x \Leftrightarrow x\lg 2 > x\lg 5 \Leftrightarrow x(\lg 5 - \lg 2) < 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

Ví dụ 2: Giải bất phương trình:

$$49.2^{x^2} > 16.7^x.$$

Giải

Biến đổi bất phương trình về dạng :

$$2^{x^2-4} > 7^{x-2}.$$

Lấy logarit cơ số 2 hai vế phương trình, ta được:

$$\log_2 2^{x^2-4} > \log_2 7^{x-2} \Leftrightarrow x^2 - 4 > (x-2)\log_2 7$$
$$\Leftrightarrow f(x) = x^2 - x\log_2 7 + 2\log_2 7 - 4 > 0,$$

ta có:

$$\Delta = \log_2^2 7 - 8\log_2 7 + 16 = (\log_2 7 - 4)^2 = (4 - \log_2 7)^2$$

suy ra $f(x) = 0$ có nghiệm:

$$x_{1,2} = \frac{\log_2 7 \pm (4 - \log_2 7)}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = \log_2 7 - 2 < x_1 \end{array}\right. .$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x > 2$ hoặc $x < \log_2 7 - 2$.

Chú ý: Đối với một số bất phương trình cần thiết rút gọn trước khi logarit hoá.

Ví dụ 3: Giải bất phương trình:

$$9^x + 9^{x+1} + 9^{x+2} < 4^x + 4^{x+1} + 4^{x+2}.$$

Giải

Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$9^x(1 + 9^1 + 9^2) < 4^x(1 + 4^1 + 4^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{9^x}{4^x} < \frac{21}{91} \Leftrightarrow \left(\frac{9}{4}\right)^x < \frac{21}{91} \Leftrightarrow x < \log_{\frac{9}{4}}\frac{21}{91}.$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $x < \log_{\frac{9}{4}}\frac{21}{91}$.

Chú ý: Ví dụ trên chúng ta lấy logarit cơ số $\frac{9}{4} > 1$ nên dấu của bất phương trình không đổi chiều. Nếu chúng ta sử dụng phép biến đổi:

$$\frac{4^x}{9^x} > \frac{91}{21} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^x > \frac{91}{21} \Leftrightarrow x < \log_{\frac{4}{9}}\frac{91}{21},$$

bởi $\frac{4}{9} < 1$ thì hàm logarit nghịch biến.

Chú ý: Phương pháp logarit hoá tỏ ra rất hiệu lực khi hai vế bất phương trình có dạng tích các luỹ thừa.

Ví dụ 4: Giải bất phương trình: $2^x.3^{x-1}.5^{x-2} > 12$.

Giải

Lấy logarit cơ số 10 hai vế, ta được:

$$\lg(2^x.3^{x-1}.5^{x-2}) > \lg12 \Leftrightarrow \lg2^x + \lg3^{x-1} + \lg5^{x-2} > \lg12$$

$$\Leftrightarrow x\lg2 + (x - 1)\lg3 + (x - 2)\lg5 > \lg12$$

$$\Leftrightarrow x(\lg2 + \lg3 + \lg5) > \lg12 + \lg3 + 2\lg5$$

$$\Leftrightarrow x(\lg2 + \lg3 + \lg5) > 2\lg2 + 2\lg3 + 2\lg5 \Leftrightarrow x > 2.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x > 2$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải bất phương trình: $3^{x^2-4x} < \frac{5}{3}$.

Bài tập 2: Giải các bất phương trình:

a. $7.3^{x+1} + 5^{x+3} \le 3^{x+4} + 5^{x+2}$. b. $6^{2x+3} < 2^{x+7}.3^{3x-1}$.

Bài toán 3: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 1.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Mục đích chính của phương pháp này là chuyển các bài toán đã cho về bất phương trình đại số quen biết đặc biệt là các bất phương trình bậc 2 hoặc các hệ bất phương trình.

Ví dụ 1: Cho bất phương trình:

$$m.4^x - 2(m+1).2^x - m + 5 < 0. \qquad (1)$$

a. Giải bất phương trình với m = 1.

b. Xác định m để bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x < 0$.

Giải

Đặt $t = 2^x$, điều kiện $t > 0$.

Khi đó (1) có dạng: $f(t) = mt^2 - 2(m+1)t - m + 5 < 0$. (2)

a. Với m = 1, ta được: $t^2 - 4t + 4 < 0$, vô nghiệm.

Vậy, với m = 1 bất phương trình vô nghiệm.

b. Vì $x < 0$ nên: $2^x < 2^0 \Leftrightarrow t < 1$.

Vậy (1) nghiệm đúng với $\forall x < 0 \Leftrightarrow$ (2) nghiệm đúng với $\forall t \in (0, 1)$. (*)

Ta xét các trường hợp sau:

- Với m = 0

$$(2) \Leftrightarrow -2t + 5 < 0 \Leftrightarrow t > \frac{5}{2} \text{ không thoả mãn.}$$

- Với m > 0

  Điều kiện (*) được thoả mãn khi f(t) = 0 có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thoả mãn $t_1 < 0 < 1 < t_2$. Vậy:

$$\begin{cases} m > 0 \\ mf(0) < 0 \\ mf(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -m + 5 < 0 \\ -2m + 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 5.$$

- Với m < 0

  Ta có $\Delta_f = 2m^2 - 3m + 1 > 0$ với $\forall m < 0$.

  Điều kiện (*) được thoả mãn khi f(t) = 0 có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thoả mãn $t_1 < t_2 < 0$ hoặc $1 < t_1 < t_2$. Vậy:

$$\begin{cases} m < 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} mf(0) > 0 \\ S/2 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} mf(1) > 0 \\ S/2 > 1 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -m + 5 < 0 \\ \dfrac{m+1}{m} < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -2m + 3 < 0 \\ \dfrac{m+1}{m} > 1 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy với m > 5 bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x < 0$.

Ví dụ 2: Giải bất phương trình:

$$(9\sqrt{3} + 11\sqrt{2})^x + 2(5 + 2\sqrt{6})^x - 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})^x < 1.$$

Giải

Nhận xét rằng:

- $(9\sqrt{3} + 11\sqrt{2})^x = [(\sqrt{3} + \sqrt{2})^3]^x = [(\sqrt{3} + \sqrt{2})^x]^3$,
- $(5 + 2\sqrt{6})^x = [(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2]^x = [(\sqrt{3} + \sqrt{2})^x]^2$,
- $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^x.(\sqrt{3} - \sqrt{2})^x = [(\sqrt{3} + \sqrt{2}).(\sqrt{3} - \sqrt{2})]^x = 1$.

Do đó, nếu đặt $t = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^x$, điều kiện $t > 0$, thì $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^x = \frac{1}{t}$.

Khi đó, phương trình tương đương với:

$$t^3 + 2t^2 - 2.\frac{1}{t} < 1 \Leftrightarrow t^4 + 2t^3 - t - 2 < 0$$

$$\Leftrightarrow (t - 1)(t + 2)(t^2 + t + 1) < 0 \Leftrightarrow -2 < t < 1.$$

Kết hợp với điều kiện của t, ta được:

$$0 < t < 1 \Leftrightarrow (2 + \sqrt{3})^x < 1 \Leftrightarrow x < 0.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < 0$.

Ví dụ 3: Cho bất phương trình:

$$m.9^{x^2-3x+2} - 6^{x^2-3x+2} + 16(1 - m)4^{x^2-3x} < 0. \qquad (1)$$

a. Giải bất phương trình với $m = 1$.

b. Xác định m để mọi nghiệm của (1) thoả mãn bất phương trình

$$1 < x < 2. \qquad (2)$$

c. Xác định m để mọi nghiệm của (2) đều là nghiệm của (1).

Giải

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$m.9^{x^2-3x+2} - 6^{x^2-3x+2} + (1 - m)4^{x^2-3x+2} < 0. \qquad (3)$$

Chia cả hai vế của bất phương trình (3) cho $4^{x^2-3x+2} \neq 0$, ta được:

$$m.\left(\frac{9}{4}\right)^{x^2-3x+2} - \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+2} + 1 - m < 0. \qquad (4)$$

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+2}$, điều kiện $t > 0$.

Khi đó (4) có dạng:

$$f(t) = mt^2 - t + 1 - m < 0. \qquad (5)$$

a. Với $m = 1$, ta được:

$$t^2 - t < 0 \Leftrightarrow 0 < t < 1 \Leftrightarrow 0 < \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+2} < 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

Vậy, với $m = 1$ bất phương trình có nghiệm $1 < x < 2$.

b. Nhận xét rằng:

$f(t) = 0$ có nghiệm $t = 1$ và $t = \frac{1-m}{m}$.

Với $1 < x < 2$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+2} < 3^0 = 1 \Leftrightarrow 0 < t < 1. \qquad (*)$$

Vậy để bất phương trình có nghiệm thoả mãn $1 < x < 2$

$\Leftrightarrow$ (5) có nghiệm thoả mãn $t \in (0, 1)$.

Ta xét các trường hợp:

- Với $m = 0$

  (5) $\Leftrightarrow -t + 1 < 0 \Leftrightarrow t > 1$ không thoả mãn (*).

- Với $m > 0$, điều kiện là:

  $$0 \le \frac{1-m}{m} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m \le 1.$$

- Với $m < 0$, không thoả mãn

Vậy, với $\frac{1}{2} < m \le 1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Để mọi nghiệm của (2) thoả mãn (1) điều kiện là:

(5) nghiệm đúng với mọi $t \in (0, 1)$.

- Với $m > 0$, điều kiện là: $\frac{1-m}{m} \le 0 \xleftrightarrow{m>0} m \ge 1$.

- Với $m < 0$, điều kiện là: $\frac{1-m}{m} \ge 1$ vô nghiệm.

Vậy, với $m \ge 1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý. Trong nhiều trường hợp cần có những đánh giá đúng đắn các nhân tử của bất phương trình để đề xuất phép đặt ẩn phụ thích hợp.

Ví dụ 4: Giải bất phương trình:

$$(2a)^{x^2+4x+6} + (1-a^2)^{x^2+4x+6} \le (1+a^2)^{x^2+4x+6}, \text{ với } 0 < a < 1.$$

Giải

Chia hai vế của bất phương trình cho $(1+a^2)^{x^2+4x+6} > 0$, ta được:

$$\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^{x^2+4x+6} + \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^{x^2+4x+6} \le 1. \qquad (1)$$

Đặt $a = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$, $0 < \frac{t}{2} < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 0 < t < \frac{\pi}{2}$, thì:

$$\frac{2a}{1+a^2} = \sin t \text{ và } \frac{1-a^2}{1+a^2} = \cos t.$$

Bất phương trình (1) tương đương với:

$$(\sin t)^{(x+2)^2+2} + (\cos t)^{(x+2)^2+2} \le 1. \qquad (2)$$

Vì $(x+1)^2 + 2 \ge 2$ nên :

$$\begin{cases} (\sin t)^{(x+1)^2+2} \le \sin^2 t \\ (\cos t)^{(x+1)^2+2} \le \cos^2 t \end{cases} \xrightarrow{+} \text{VT}(2) \le 1, \forall t.$$

Vậy, bất phương trình đã cho nhận mọi x làm nghiệm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các bất phương trình:

a. $\dfrac{2^{1-x} - 2^x + 1}{2^x - 1} \le 0.$

b. $9^{\sqrt{x^2-3}+1} + 3 < 28.\ 3^{\sqrt{x^2-3}-1}.$

c. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-1} - \left(\dfrac{1}{9}\right)^{x} > 4^{\frac{1}{2}\log_2 3}.$

d. $\sqrt{9^x - 3^{x+2}} > 3^x - 9.$

Bài tập 2: Giải các bất phương trình:

a. $25^{1+2x-x^2} + 9^{1+2x-x^2} \ge 34.15^{2x-x^2}.$

b. $8.3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} + 9^{1+\sqrt[4]{x}} > 9^{\sqrt{x}}.$

c. $(5+\sqrt{21})^x + (5-\sqrt{21})^x \le 2^{x+\log_2 5}.$

d. $2^{2\sqrt{x+3}-x-6} + 15.\ 2^{\sqrt{x+3}-5} < 2^x.$

Bài tập 3: Giải các bất phương trình:

a. $3^{2x} - 8.3^{x+\sqrt{x+4}} - 9.9^{\sqrt{x+4}} > 0.$

b. $2^x + \dfrac{2^x}{\sqrt{2^x - 1}} > \dfrac{35}{12}.$

c. $\sqrt{3^x+1} \le 3^{\frac{x}{2}} + \dfrac{2}{\sqrt{3^x+1}}.$

d. $5^x + \dfrac{2.5^x}{\sqrt{5^{2x}-4}} > 3\sqrt{5}.$

Bài tập 4: Tìm m để bất phương trình:

$$9^x - 2(m+1)3^x - 2m - 3 > 0 \text{ với } \forall x \in \mathbf{R}.$$

Bài tập 5: Cho:

$$f(x) = \frac{-x^2 + 3x - 3}{(m-1).2^{\cos^2 x} + 2^{1+\sin^2 x} + 2m}.$$

Tìm m để f(x) < 0 với mọi x.

Bài tập 6: Cho bất phương trình:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}} > 12. \qquad (*)$$

a. Giải bất phương trình (*).

b. Xác định m để mọi nghiệm của (*) cũng là nghiệm của bất phương trình $2x^2 + (m + 2)x + 2 - 3m < 0$.

Bài tập 7: Cho bất phương trình:

$$4^{x-1} - m(2^x + 1) > 0.$$

a. Giải bất phương trình khi $m = \frac{16}{9}$.

b. Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Bài tập 8: Xác định m để bất phương trình:

$$m.9^x - (2m + 1).6^x + m.4^x \le 0$$

nghiệm đúng với $\forall x \in [0, 1]$.

Bài toán 4: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 2.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ý tưởng của phương pháp này cũng giống như phương trình mũ.

Ví dụ 1: Giải bất phương trình:

$$4^x - 2^{x+1} + 4^{x^2} \le 0. \qquad (1)$$

Giải

Đặt $t = 2^x$, điều kiện $t > 0$.

Khi đó, bất phương trình có dạng:

$$t^2 - 2t + 4^{x^2} \le 0 \qquad (2)$$

ta có $\Delta' = 1 - 4^{x^2} \le 0$, do đó:

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ t = -\dfrac{b}{2a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4^{x^2} = 0 \\ t = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4^{x^2} = 1 \\ 2^x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm duy nhất x = 0.

Ví dụ 2: Giải bất phương trình:

$$9^x - 2(x + 5).3^x + 9(2x + 1) \ge 0.$$

Giải

Đặt $t = 3^x$, điều kiện $t > 0$, khi đó bất phương trình tương đương với:

$$f(t) = t^2 - 2(x + 5).t + 9(2x + 1) \ge 0$$

ta có $\Delta' = (x + 5)^2 - 9(2x + 1) = (x - 4)^2$, do đó $f(t) = 0$ có hai nghiệm :

$$t = 9 \vee t = 2x + 1.$$

Do đó bất phương trình có dạng:

$$(t - 9)(t - 2x - 1) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t - 9 \ge 0 \\ t - 2x - 1 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} t - 9 \le 0 \\ t - 2x - 1 \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3^x \ge 9 \\ 3^x \ge 2x + 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 3^x \le 9 \\ 3^x \le 2x + 1 \end{cases} \end{array}\right. \overset{\text{Bernouli}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 2 \\ x \le 0 \vee x \ge 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x \le 2 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 2 \\ 0 \le x \le 1 \end{array}\right. .$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x \ge 2 \vee 0 \le x \le 1$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các bất phương trình:

a. $4^x - 2^{x+1} + 4^{x^2} \le 0$. b. $4^{x^2+1}.3^{2x} - 4.3^x + 1 \le 0$.

Bài tập 2: Giải bất phương trình:

$$9^x + 2(x - 2).3^x + 2x - 5 > 0.$$

Bài tập 3: Giải bất phương trình:

$$4^{x^2} + (x^2 - 3).2^{x^2} - 2x^2 + 2 > 0.$$

Bài tập 4: Giải bất phương trình:

$$4^x - (x + 3).2^x + 2(x + 1) \ge 0.$$

Bài toán 5: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 3.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ý tưởng của phương pháp này cũng giống như phương trình mũ.

Ví dụ 1: Giải bất phương trình:

$$6^x + 2^{x+2} \ge 4.3^x + 2^{2x}.$$

Giải

Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$2^x.3^x + 4.2^x - 4.3^x - 2^{2x} \geq 0.$$

Đặt

$$\begin{cases} u = 3^x \\ v = 2^x \end{cases}, \text{ điều kiện } u, v > 0.$$

Khi đó, bất phương trình có dạng:

$$uv + 4v - 4u - v^2 \geq 0 \Leftrightarrow (u - v)(v - 4) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u - v \geq 0 \\ v - 4 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} u - v \leq 0 \\ v - 4 \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3^x \geq 2^x \\ 2^x \geq 4 \end{cases} \\ \begin{cases} 3^x \leq 2^x \\ 2^x \leq 4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 0 \\ x \leq 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \leq 0 \end{array}\right..$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x \geq 2$ hoặc $x \leq 0$.

Ví dụ 2: Giải bất phương trình:

$$2^x + \sqrt{2x+1} < \sqrt{2^{2x+1} + 4x + 2}.$$

Giải

Điều kiện: $2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$.

Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$2^x + \sqrt{2x+1} < \sqrt{2.2^{2x} + 2(2x+1)}.$$

Đặt: $\begin{cases} u = 2^x \\ v = \sqrt{2x+1} \end{cases}$, điều kiện $u > 0$ và $v \geq 0$.

Khi đó, bất phương trình được biến đổi về dạng:

$$u + v < \sqrt{2u^2 + 2v^2} \Leftrightarrow (u + v)^2 < (2u^2 + 2v^2) \Leftrightarrow (u - v)^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow u \neq v \Leftrightarrow 2^x \neq \sqrt{2x+1}.$$

Ta đi xét phương trình:

$$2^x = \sqrt{2x+1} \Leftrightarrow 2^{2x} = 2x + 1 \overset{\text{Bernouli}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} 2x = 0 \\ 2x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1/2 \end{array}\right..$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x \in [-\frac{1}{2}, +\infty) \setminus \{0, \frac{1}{2}\}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các bất phương trình:

a. $6^x + 2^{x+2} \leq 4.3^x + 2^{2x}$.

b. $6^x - 2.3^x - 3.2^x + 6 \geq 0$.

Bài tập 2: Giải bất phương trình:

$$9^x - 3^{x+2} - 3^{x^2+x} + 3^{x^2+2} \geq 0.$$

Bài tập 3: Giải các bất phương trình:

a. $2^{x^2+\sqrt{x-1}-1} + 2 \leq 2^{x^2} + 2^{\sqrt{x-1}}$.

b. $\sqrt{8 + 2^{\sqrt{3-x}+1} - 4^{\sqrt{3-x}}} > 5.\ 2^{1+\sqrt{3-x}}$.

Bài tập 4: Giải bất phương trình:

$$\sqrt{5^x - 1} + 5^x - 3 \geq \sqrt{5^{2x+\log_5 2} - 2.5^{x+1} + 16}.$$

Bài toán 6: Sử dụng tính chất đơn điệu của hàm số.

Ví dụ 1: Giải bất phương trình:

$$2.2^x + 3.3^x > 6^x - 1.$$

Giải

Chia hai vế bất phương trình cho $6^x > 0$, ta được:

$$\frac{2}{3^x} + \frac{3}{2^x} + \frac{1}{6^x} > 1. \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{2}{3^x} + \frac{3}{2^x} + \frac{1}{6^x}$, là hàm nghịch biến.

Ta có:

- Với $x \geq 2$, $f(x) \leq f(2) = 1$ do đó bất phương trình (1) vô nghiệm.
- Với $x < 2$, $f(x) > f(2) = 1$ do đó bất phương trình (1) nghiệm đúng.

Vậy $x < 2$ là nghiệm của bất phương trình.

Ví dụ 2: Giải bất phương trình:

$$\frac{3^{2-x} + 3 - 2x}{4^x - 2} \geq 0.$$

Giải

Nhận xét rằng:

- Hàm số $f(x) = 3^{2-x} + 3 - 2x$ nghịch biến trên **R** và $f(2) = 0$.
- Hàm số $g(x) = 4^x - 2$ đồng biến trên **R** và $g(\frac{1}{2}) = 0$.

Bất phương trình đã cho được biến đổi tương đương về hệ:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x) = 3^{2-x} + 3 - 2x \geq 0 = f(2) \\ g(x) = 4^x - 2 > 0 = g(\frac{1}{2}) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = 3^{2-x} + 3 - 2x \leq 0 \\ g(x) = 4^x - 2 < 0 = g(\frac{1}{2}) \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \leq 2 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 2 \\ x < \frac{1}{2} \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x \leq 2.$$

Vậy $\frac{1}{2} < x \leq 2$ là nghiệm của bất phương trình.

Ví dụ 3: Cho bất phương trình:

$$2^{(m^2-1)x} - 2^{x-4m+3} < (2 - m^2)x + 3 - 4m. \quad (1)$$

a. Giải bất phương trình với m = 2.

b. Tìm m để bất phương trình sau vô nghiệm.

Giải

Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$2^{(m^2-1)x} + (m^2 - 1)x < 2^{x-4m+3} + x - 4m + 3. \quad (2)$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t$ đồng biến trên **R**.

Vậy, bất phương trình được viết dưới dạng:

$$f[(m^2 - 1)x] < f(x - 4m + 3) \Leftrightarrow (m^2 - 1)x < x - 4m + 3$$

$$\Leftrightarrow (m^2 - 1)x - (m^2 - 4m + 3) < 0. \quad (3)$$

a. Với m = 2, ta được:

$$3x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{3}.$$

Vậy, với m = 2 bất phương trình có nghiệm $x < -\frac{1}{3}$.

b. Bất phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ bất phương trình (3) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ -(m^2 - 4m + 3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ 1 \leq m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy, với m = 1 bất phương trình (1) vô nghiệm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các bất phương trình:

a. $2^x + 3^x + 1 > 6^x$.

b. $3^{\sqrt{x+4}} + 2^{\sqrt{2x+4}} > 13$.

c. $(5 - \sqrt{21})^x + 7(5 + \sqrt{21})^x > 8$.

d. $3^{\sqrt{2(x-1)+1}} - 3^x \le x^2 - 4x + 3$.

Bài tập 2: Giải bất phương trình:

$$\frac{2^x - 1}{3^x - 2x - 1} \ge 0.$$

Bài toán 7: Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ.

Ví dụ 1: Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\frac{1}{2^{|x|}} \ge 1 + m^2. \qquad (1)$$

Giải

Điều kiện cần: Giả sử (1) có nghiệm là $x = x_0$ suy ra $-x_0$ cũng là nghiệm của (1).

Vậy (1) có nghiệm duy nhất khi:

$$x_0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0.$$

Thay $x_0 = 0$ vào (1), ta được:

$$1 \ge 1 + m^2 \Leftrightarrow m^2 \le 0 \Leftrightarrow m = 0.$$

Đó chính là điều kiện cần để phương trình có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ: Giả sử m = 0, khi đó (1) có dạng:

$$\frac{1}{2^{|x|}} \ge 1 \Leftrightarrow 2^{|x|} \le 1 \Leftrightarrow |x| \le 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

Vậy, với m = 0 phương trình có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 2: Tìm m để bất phương trình sau nghiệm đúng với $\forall x \in [1, 3]$:

$$2^{|2x^2 + m(x+1) + 15|} \le 2 - (m + 8)(x^2 - 3x + 2). \qquad (1)$$

Giải

Điều kiện cần: Bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in [1, 3] \Rightarrow$ nghiệm đúng với $x = 1$, $x = 2$, tức là ta có:

$$\begin{cases} |2m + 17| \le 1 \\ |3m + 23| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le 2m + 17 \le 1 \\ -1 \le 3m + 23 \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9 \le m \le -8 \\ -8 \le m \le -\frac{22}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = -8.$$

Vậy $m = -8$ là điều kiện cần để (1) nghiệm đúng với $\forall x \in [1, 3]$.

Điều kiện đủ: Với $m = -8$, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow |2x^2 - 8x + 7| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le 2x^2 - 8x + 7 \le 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 8x + 8 \ge 0 \\ 2x^2 - 8x + 6 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 \ge 0 \\ x^2 - 4x + 3 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le x \le 3.$$

Vậy với $m = -8$ bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in [1, 3]$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm duy nhất:

a. $\frac{1}{2^{|x|}} \ge 1 + m^2$.

b. $2^{|x-1|} \le 1 + m^2$.

Bài tập 2: Tìm m để tập nghiệm của bất phương trình:

$$\sqrt{2^{2x} - m2^{x+1}} > 1 - 2^x.$$

chứa đoạn $[-2, 0]$.

Bài toán 8: Sử dụng phương pháp đánh giá.

Ví dụ 1: Giải bất phương trình:

$$3^{x^2-1} + (x^2 - 1).3^{x+1} \ge 1. \quad (1)$$

Giải

Xét hai trường hợp:

a. Với $x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow |x| < 1$, suy ra:

$$\begin{cases} 3^{x^2-1} < 1 \\ (x^2 - 1).3^{x+1} < 0 \end{cases} \Rightarrow 3^{x^2-1} + (x^2 - 1).3^{x+1} < 1 \Rightarrow \text{(1) vô nghiệm.}$$

b. Với $x^2 - 1 \ge 0 \Leftrightarrow |x| \ge 1$, suy ra:

$$\begin{cases} 3^{x^2-1} \ge 1 \\ (x^2 - 1).3^{x+1} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow 3^{x^2-1} + (x^2 - 1).3^{x+1} \ge 1 \Rightarrow \text{(1) có nghiệm } |x| \ge 1.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $|x| \ge 1$.

Ví dụ 2: Giải bất phương trình:

$$2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} \le 2(\sin x + \cos x). \qquad (1)$$

Giải.

Ta có:

$$VT = 2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 2^{\sin^2 x} + 2^{1-\sin^2 x}$$

$$= 2^{\sin^2 x} + \frac{2}{2^{\sin^2 x}} \overset{\text{Côsi}}{\ge} 2\sqrt{2^{\sin^2 x}.\frac{2}{2^{\sin^2 x}}} = 2\sqrt{2}.$$

$$VP = 2(\sin x + \cos x) = 2\sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) \ge 2\sqrt{2}$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} VT = 2\sqrt{2} \\ VP = 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{\sin^2 x} = \dfrac{2}{2^{\sin^2 x}} \\ \sin(x + \dfrac{\pi}{4}) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2^{\sin^2 x})^2 = 2 \\ x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các bất phương trình:

a. $4^{\sin^2 \pi x} + 3.4^{\cos^2 \pi x} \le 8.$ b. $4^{x^2+x+1} - 2^{x+2} + 1 \le 0.$

Bài tập 2: Cho bất phương trình:

$$2^{x^2} + 2^{\sin^2 x} \le 1 + \sqrt{1 - m^2}$$

a. Giải bất phương trình khi m = 0.

b. Giải và biện luận bất phương trình theo m.

CHỦ ĐỀ 3

HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Định nghĩa: Hệ phương trình mũ là hệ phương trình chứa ẩn số ở số mũ của luỹ thừa.

II. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Bài toán 1: Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt điều kiện cho các biểu thức trong hệ có nghĩa.

Bước 2: Sử dụng các phép thế để nhận được từ hệ một phương trình theo ẩn x hoặc y (đôi khi có thể là theo cả hai ẩn x, y).

Bước 3: Giải phương trình nhận được bằng các phương pháp đã biết.

Bước 4: Kết luận về nghiệm cho hệ phương trình.

Ví dụ 1: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 2 & (1) \\ (y+1)^{x^2+x+2m} = 1 & (2) \end{cases}.$$

a. Giải hệ phương trình với m = 1.

b. Tìm m để hệ có ba cặp nghiệm phân biệt.

Giải

Thay (1) vào (2), ta được:

$$(2 - x + 1)^{x^2+x+2m} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3 - x = 1 \\ \begin{cases} 3 - x > 0 \\ x^2 + x + 2m = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \text{ và } y = 0 \\ \begin{cases} x < 3 \\ f(x) = x^2 + x + 2m = 0 \ (3) \end{cases} \end{array}\right.$$

Tức là, với mọi m hệ luôn có cặp nghiệm (2, 0).

a. Với m = 1, ta được:

$(3) \Leftrightarrow x^2 + x + 2m = 0.$ vô nghiệm.

Vậy, với m = 1 hệ phương trình có một cặp nghiệm (2, 0).

b. Để hệ có ba cặp nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (3) có hai nghiệm phân biệt khác 2 và nhỏ hơn 3

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(3)} > 0 \\ af(3) > 0 \\ \dfrac{S}{2} < 3 \\ f(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 8m > 0 \\ 12 + 2m > 0 \\ -\dfrac{1}{2} < 3 \\ 6 + 2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < m < \dfrac{1}{8} \\ m \neq -3 \end{cases}.$$

Vậy, với $m \in (-6, \frac{1}{8}) \backslash \{-3\}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 2: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^{9x+y} = y^{9x-y} \\ x^m y = 1 \end{cases}.$$

a. Giải hệ phương trình với m = 2.

b. Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất.

Giải

Điều kiện x, y > 0.

Từ phương trình thứ hai của hệ ta rút được

$y = x^{-m}$.

Thế vào phương trình thứ nhất, ta được:

$$x^{9x+x^{-m}} = x^{-m(9x-x^{-m})} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ 9x + x^{-m} = -m(9x - x^{-m}) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \ \& \ y = 1 \\ 9x^{m+1} + 1 = -m(9x^{m+1} - 1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \ \& \ y = 1 \\ 9(m+1)x^{m+1} = m - 1 \quad (3) \end{array}\right.$$

Tức là, với mọi m hệ luôn có cặp nghiệm (1, 1).

a. Với m = 2, ta được:

$$(3) \Leftrightarrow 27x^3 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow y = x^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$$

Vậy, với m = 2 hệ phương trình có hai cặp nghiệm (1, 1) và $(\frac{1}{3}, 9)$.

b. Để hệ có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ (3) vô nghiệm hoặc có nghiệm x = 1.

Xét phương trình (3):

- Với $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$

$$(3) \Leftrightarrow 0 = -2,\ \text{mâu thuẫn} \Rightarrow (3)\ \text{vô nghiệm.}$$

- Với $m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$

$$(3) \Leftrightarrow x^{m+1} = \frac{m-1}{9(m+1)}.$$

Khi đó, để (3) vô nghiệm hoặc có nghiệm $x = 1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{m-1}{9(m+1)} \leq 0 \\ \dfrac{m-1}{9(m+1)} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < m \leq 1 \\ m = \dfrac{5}{4} \end{array}\right. .$$

Vậy, với $-1 \leq m \leq 1$ hoặc $m = \frac{5}{4}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải hệ phương trình:

a. $\begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y} \\ x^2y = 1 \end{cases}$.

b. $\begin{cases} x^{y+4x} = y^{5(y-\frac{x}{3})} \\ x^3 = y^{-1} \end{cases}$.

Bài tập 2: Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + a = 1 \\ 2^{a^2}.4^{x+y-xy} = 2 \end{cases}.$$

Bài tập 3: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2^x.3^y = 2m \\ 3^x.2^y = 3m \end{cases}.$$

a. Giải hệ phương trình với $m = 1$.

b. Tìm m để hệ có cặp nghiệm (x, y) thoả mãn $x = 2y$. Hãy chỉ ra cặp nghiệm đó.

Bài tập 4: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2^{x^2+4y^2} = 4.2^{m(x-2)-y} \\ mx - y - 2m - 2 = 0 \end{cases}.$$

a. Giải hệ phương trình với $m = -\frac{1}{2}$.

b. Tìm m để hệ phương trình có 2 cặp nghiệm phân biệt (x_1, y_1) và (x_2, y_2) thoả mãn

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \sqrt{32/5}.$$

Bài toán 2: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ.

Ví dụ 1: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} m3^{\sqrt{x}+1} + 2^y = 2m \\ 3^{\sqrt{x}+1} + m2^y = m + 1 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

a. Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất.

b. Tìm m nguyên để nghiệm duy nhất của hệ là nghiệm nguyên.

Giải

Đặt:

$$\begin{cases} u = 3^{\sqrt{x}+1} \\ v = 2^y \end{cases}$$, điều kiện $u \geq 3$ và $v > 0$.

Khi đó hệ (I) được biến đổi về dạng :

$$\begin{cases} mu + v = 2m \\ u + mv = m + 1 \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1 \, ;$$

$$D_u = \begin{vmatrix} 2m & 1 \\ m+1 & m \end{vmatrix} = 2m^2 - m - 1 \, ; \, D_v = \begin{vmatrix} m & 2m \\ 1 & m+1 \end{vmatrix} = m^2 - m.$$

a. Hệ có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D \neq 0 \\ u = \dfrac{D_u}{D} \geq 3 \\ v = \dfrac{D_v}{D} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 \neq 0 \\ \dfrac{2m+1}{m+1} \geq 3 \\ \dfrac{m}{m+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \pm 1 \\ -2 \leq m < -1 \\ m < -1 \vee m \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq m < -1.$$

Vậy, hệ có nghiệm khi $-2 \leq m < -1$.

b. Với m nguyên ta có $m = -2$ và khi đó hệ có nghiệm là:

$$\begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{\sqrt{x}+1} = 3 \\ 2^y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + 1 = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Vậy, với $m = -2$ hệ có nghiệm nguyên (0, 1).

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2^x - 2^y = 2 \end{cases}.$$

Giải

Biến đổi hệ phương trình về dạng:

$$\begin{cases} 2^{x+y} = 2 \\ 2^x - 2^y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x.(-2^y) = -2 \\ 2^x - 2^y = 2 \end{cases}.$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = 2^x \\ v = -2^y \end{cases}, u > 0 \text{ và } v < 0,$$

ta được:

$$\begin{cases} u + v = 2 \\ u.v = -2 \end{cases}.$$

Khi đó u, v là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - 2t - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \pm \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 + \sqrt{3} \\ v = 1 - \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 1 + \sqrt{3} \\ -2^y = 1 - \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_2(1 + \sqrt{3}) \\ y = \log_2(\sqrt{3} - 1) \end{cases}.$$

Vậy, hệ phương trình có một nghiệm.

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4^{2x^2-2} - 2^{2x^2+y} + 4^y = 1 \\ 2^{2y+2} - 3.2^{2x^2+y} = 16 \end{cases}.$$

Giải

Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} 4^{2(x^2-1)} - 4.4^{x^2-1}.2^y + 2^{2y} = 1 \\ 2^{2y} - 3.4^{x^2-1}.2^y = 4 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = 4^{x^2-1} \\ v = 2^y \end{cases}, \text{ điều kiện } u \geq \frac{1}{4} \text{ và } v > 0.$$

Khi đó hệ (I) được biến đổi về dạng :

$$\begin{cases} u^2 - 4uv + v^2 = 1 \quad (1) \\ v^2 - 3uv = 4 \qquad (2) \end{cases}. \qquad \text{(II)}$$

Để giải hệ (II) ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Khử số hạng tự do từ hệ ta được:

$$4u^2 - 13uv + 3v^2 = 0. \qquad (3)$$

Đặt u = tv, khi đó :

$$(3) \Leftrightarrow v^2(4t^2 - 13t + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = 1/4 \end{array}\right..$$

- Với $t = 3$ ta được $u = 3v$,

  $(2) \Leftrightarrow -8v^2 = 4$ vô nghiệm.

- Với $t = \frac{1}{4}$ ta được $u = \frac{1}{4}v \Leftrightarrow v = 4u$,

  $(2) \Leftrightarrow 4u^2 = 4 \Leftrightarrow u = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{x^2-1} = 1 \\ 2^y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Vậy, hệ phương trình có hai cặp nghiệm (1, 2) và (− 1, 2).

Cách 2: Nhận xét rằng nếu (u, v) là nghiệm của hệ thì $u \neq 0$.

Từ (2) ta được $u = \dfrac{v^2 - 4}{3v}$. (4)

Thay (4) vào (1), ta được:

$$2v^4 - 31v^2 - 16 = 0. \qquad (5)$$

Đặt $t = v^2$, $t > 0$, ta được:

$$(5) \Leftrightarrow 2t^2 - 31t - 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 16 \\ t = -1/2\ (l) \end{array}\right. \Leftrightarrow v^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow v = 4 \Rightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{x^2-1} = 1 \\ 2^y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Vậy, hệ phương trình có hai cặp nghiệm (1, 2) và (− 1, 2).

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải hệ phương trình:

a. $\begin{cases} 3^{2x+2} + 2^{2y+2} = 17 \\ 2.3^{x+1} + 3.2^y = 8 \end{cases}$.

b. $\begin{cases} 2^{2|x|+1} - 3.2^{|x|} = y^2 - 2 \\ 2y^2 - 3y = 2^{2|x|} - 2 \end{cases}$.

c. $\begin{cases} 9^{\log_2(xy)} - 3 = 2(xy)^{\log_2 3} \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 = 1 \end{cases}$.

d. $\begin{cases} 2^{3x+1} + 2^{y-2} = 3.2^{y+3x} \\ \sqrt{3x^2 + 1 + xy} = \sqrt{x+1} \end{cases}$.

Bài tập 2: Giải hệ phương trình:

a. $\begin{cases} \dfrac{\sqrt[x]{9}}{3} = 9^{\frac{x}{2y}} \\ \dfrac{x+3y}{x} = \dfrac{2x}{y} - 4 \end{cases}$. b. $\begin{cases} 3^x - 2^{y^2} = 77 \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y^2}{2}} = 7 \end{cases}$.

Bài tập 3: Giải và biện luận hệ phương trình:

a. $\begin{cases} 2^x + m.3^y = 3m \\ m.2^x + 3^y = 2m+1 \end{cases}$. b. $\begin{cases} 2^{2x} + y.2^{x+1} = m.2^x + y \\ y^2 + y.2^{x+1} = my + 2^x \end{cases}$.

Bài tập 4: Cho hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2^{2x} + 4^{2y} = m \\ 2^x + 4^y + 2^{x+2y} = m \end{cases}.$$

a. Giải hệ với m = 1.

b. Tìm m để hệ sau có nghiệm

Bài tập 5: Giải và biện luận hệ phương trình :

$$\begin{cases} a^{2x} + a^{2y} = 2b \\ a^{x+y} = c \end{cases}.$$

Bài tập 6: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2^{\sqrt{x}+1} = y - \sqrt{y+1} + m + 1 \\ \sqrt{y+1} = 2^{2\sqrt{x}+2} - 2^{\sqrt{x}+1} + m \end{cases}.$$

a. Giải hệ phương trình với m = 0.

b. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm.

c. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Bài toán 3: Sử dụng phương pháp hàm số .

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3^x - 3^y = y - x & (1) \\ x^2 + xy + y^2 = 12 & (2) \end{cases}.$$

Giải

Xét phương trình (1) dưới dạng :

$$3^x + x = 3^y + y. \qquad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = 3^t + t$ đồng biến trên **R**.

Vậy, phương trình (3) được viết dưới dạng:

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y.$$

Khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 + xy + y^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 3x^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 2 \\ x = y = -2 \end{array}\right.$$

Vậy, hệ phương trình có 2 cặp nghiệm (2, 2) và (− 2, − 2).

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2^x + 2x = 3 + y \\ 2^y + 2y = 3 + x \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Giải:

Biến đổi tương đương hệ về dạng :

$$\begin{cases} 2^x + 2x = 3 + y \\ 3 + x = 2^y + 2y \end{cases} \Rightarrow 2^x + 3x + 3 = 2^y + 3y + 3. \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + 3t + 3$ là hàm đồng biến trên **R**.

Vậy, phương trình (1) được viết dưới dạng:

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y.$$

Khi đó hệ trở thành:

$$\begin{cases} x = y \\ 2^x + 2x = 3 + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2^x = 3 - x \quad (2) \end{cases} \quad \text{(II)}$$

- Giải (2)

Ta đoán được nghiệm x = 1, vì $2^1 = 3 - 1$. Vế trái là một hàm số đồng biến còn vế phải là hàm số nghịch biến, do vậy x = 1 là nghiệm duy nhất của phương trình này.

Khi đó hệ (II) trở thành:

$$\begin{cases} x = y \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất x = y = 1.

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2^x - 2^y = (y - x)(xy + 2) & (1) \\ x^2 + y^2 = 2 & (2) \end{cases}$$

Giải

Thay (2) vào (1) ta được:

$$2^x - 2^y = (y - x)(x^2 + y^2 + xy)$$

$$\Leftrightarrow 2^x - 2^y = y^3 - x^3 \Leftrightarrow 2^x - x^3 = 2^y - y^3. \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t^3$ đồng biến trên **R**.

Vậy, phương trình (3) được viết dưới dạng:

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y.$$

Khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 1 \\ x = y = -1 \end{array}\right.$$

Vậy, hệ phương trình có 2 cặp nghiệm (1, 1) và (− 1, − 1).

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2^x - 2^y = y - x \\ 2x^2 - 4mx - y^2 = 3m \end{cases}.$$

a. Giải hệ phương trình với m = − 1.

b. Tìm m để hệ có hai cặp nghiệm phân biệt.

Bài tập 2: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2^x = 2m^2y \\ 2^y = 2m^2x \end{cases}.$$

a. Giải hệ phương trình với m = 1.

b. Tìm m để hệ vô nghiệm.

Bài tập 3: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3^x - 3^y = (y - x)(xy + m) \\ x^2 + y^2 = m \end{cases}.$$

a. Giải hệ phương trình với m = 8.

b. Tìm m để hệ có nghiệm.

Bài tập 4: Giải và biện luận hệ phương trình :

$$\begin{cases} m^{\frac{x-y}{2}} - m^{\frac{x-y}{4}} = m^2 - m \\ n^{\frac{x+y}{3}} - n^{\frac{x+y}{6}} = n^2 - n \end{cases}.$$

Bài toán 4: Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ.

Ví dụ 1: Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} 2^{|x|} - 2^{y} = y - |x|(m+1) \\ x^2 + y = m^2 \end{cases} \qquad (I)$$

Giải

Điều kiện cần: Nhận xét rằng nếu hệ có nghiệm $(x_0, y_0) \Rightarrow (-x_0, y_0)$ cũng là nghiệm.

Vậy để hệ có nghiệm duy nhất thì $x_0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0$.

Khi đó:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2^{y} = y & (1) \\ y = m^2 & (2) \end{cases} \qquad (II)$$

Từ (2) $\Rightarrow y \geq 0 \Leftrightarrow 2^{y} \geq 1$, khi đó:

$$\begin{cases} VT_{(1)} \leq 0 \\ VP_{(1)} \geq 0 \end{cases}.$$

Vậy hệ (II) tương đương với:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = m^2 \end{cases} \Rightarrow m = 0.$$

Đó chính là điều kiện cần để hệ nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ: Giả sử m = 0, khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases} 2^{|x|} - 2^{y} = y - |x| \\ x^2 + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{|x|} + |x| = 2^{y} + y & (3) \\ x^2 + y = 0 & (4) \end{cases}$$

- Giải (3), xét hàm số $f(t) = 2^t + t$ đồng biến trên **R**.

Vậy, phương trình (3) được viết dưới dạng:

$f(|x|) = f(y) \Leftrightarrow |x| = y$.

Khi đó, hệ có dạng:

$$\begin{cases} |x| = y \\ x^2 + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0 \text{ là nghiệm duy nhất của hệ.}$$

Vậy với m = 0 hệ có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 2: Tìm a để hệ sau có nghiệm với mọi b:

$$\begin{cases} b2^{ax} + 2^{bx} = a(b+1) \\ (2-a)x^2 + y^2 = 1 \end{cases}. \qquad (I)$$

Giải

Điều kiện cần: Hệ có nghiệm với ∀b ⇒ có nghiệm với b = 0, khi đó:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = a \\ (2-a)x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1.$$

Đó chính là điều kiện cần để hệ có nghiệm với ∀b.

Điều kiện đủ: Giả sử a = 1, khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases} b2^{ax} + 2^{bx} = b + 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}. \qquad (II)$$

Nhận xét rằng hệ trên luôn nhận $x = 0$ và $y = 1$ làm nghiệm.

Vậy với a = 1 hệ có nghiệm với mọi b.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + m \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}.$$

a. Giải hệ với m = 2.

b. Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất

Bài tập 2: Tìm a để hệ phương trình sau có nghiệm với mọi b:

a. $\begin{cases} (x^2+1)^a + (b^2+1)^y = 2 \\ a + bxy + x^2y = 1 \end{cases}$. b. $\begin{cases} 2^{bx} + (a+1)by^2 = a^2 \\ (a-1)x^3 + y^2 = 1 \end{cases}$.

Bài toán 5: Sử dụng phương pháp đánh giá.

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2^{\sin(x+y)\pi} = 1 & (1) \\ 2(x^2 + y^2) = 1 & (2) \end{cases}.$$

Giải

Từ (2) ta có điều kiện $|x|, |y| \le \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Giải (1) ta được:

$$\sin(x+y)\pi = 0 \Leftrightarrow (x+y)\pi = k\pi, k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow x + y = k, k \in \mathbf{Z} \qquad (3)$$

Giải (2) ta được:

$$1 = 2(x^2 + y^2) \ge (x + y)^2 = k^2 \Rightarrow |k| \le 1 \xleftrightarrow{(3)} k = 0.$$

Vậy hệ được biến đổi thành :

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2(x^2 + y^2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ 2(x^2 + x^2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x = \pm\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \;\&\; y = -\dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{1}{2} \;\&\; y = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Vậy, hệ phương trình có 2 cặp nghiệm $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ và $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \left|2^x - 3^{y^2-1}\right| + 2^x = 2 + 3^{y^2-1} \\ 2^x.3^{y^2-1} = 1 \end{cases}.$$

Giải

Đặt

$$\begin{cases} u = 2^x \\ v = 3^{y^2-1} \end{cases}, \text{ điều kiện } u > 0 \text{ và } v \ge \frac{1}{3}.$$

Hệ có dạng:

$$\begin{cases} |u - v| + u + v = 2 & (1) \\ uv = 1 & (2) \end{cases}$$

Biến đổi (1) về dạng:

$$(1) \Leftrightarrow 4 = (u - v)^2 + (u + v)^2 + 2|u^2 - v^2| = 2(u^2 + v^2) + 2|u^2 - v^2|$$
$$\ge 2(u^2 + v^2) \ge 4uv = 4$$

Vậy hệ tương đương với:

$$\begin{cases} 2|u^2 - v^2| = 0 \\ u = v \\ uv = 1 \end{cases} \Leftrightarrow u = v = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 1 \\ 3^{y^2-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = \pm 1 \end{cases}.$$

Vậy hệ có 2 cặp nghiệm (0, 1) và (0, − 1).

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải hệ phương trình:

a. $\begin{cases} 3^{(x+y)^2} = \cos(x + y) \\ x^2 + 4y + 3 = 0 \end{cases}$.

b. $\begin{cases} 2^{\cos(x+y)\pi} = 1 \\ 2(x^2 + y^2) = 1 \end{cases}$.

Bài tập 2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2^{x+y} = x + y + 1 \\ x^2 + y = 2 \end{cases}.$$

CHƯƠNG VI

PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ LOGARIT

CHỦ ĐỀ 1

PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Định nghĩa: Phương trình logarit là phương trình chứa ẩn ở dưới dấu logarit.

II. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

Bài toán 1: Phương pháp logarit hoá và đưa về cùng cơ số.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để chuyển ẩn số khỏi loga người ta có thể logarit hoá theo cùng một cơ số cả hai vế của phương trình, bất phương trình. Chúng ta lưu ý các phép biến đổi cơ bản sau:

Dạng 1: Phương trình:

$$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = a^b \end{cases}.$$

Dạng 2: Phương trình:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = g(x) > 0 \end{cases}.$$

Chú ý: Việc lựa chọn điều kiện $f(x) > 0$ hoặc $g(x) > 0$ tuỳ thuộc vào độ phức tạp của $f(x)$ và $g(x)$.

Ví dụ 1: Giải phương trình: $\log_x(x^2 + 4x - 4) = 3$.

Giải

Biến đổi tương đương phương trình về dạng:

$$\begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ x^2 + 4x - 4 = x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ (x-1)(x^2-4) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \pm 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right. .$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 1, x = 2.

Nhận xét: Ví dụ trên đã minh hoạ dạng biến đổi thứ nhất $\log_a f(x) = b$. Chúng ta hãy so sánh với kiểu trình bày khác, như sau:

Điều kiện:

$$\begin{cases} x^2 + 4x - 4 > 0 \\ 0 < x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > -2 + \sqrt{6} \\ x < -2 - \sqrt{6} \end{array}\right. \\ 0 < x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{6} - 2 < x \neq 1. \qquad (*)$$

Ta sử dụng phép biến đổi:

$$3 = \log_x x^3.$$

Khi đó, phương trình có dạng:

$$\log_x(x^2 + 4x - 4) = \log_x x^3 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 4 = x^3$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \pm 2 \end{array}\right. \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right..$$

Như vậy, lời khuyên với các em học sinh là hãy trình bày theo dạng biến đổi tương đương để có được lời giải ngắn gọn. Để minh hoạ thêm chúng ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 2: Giải phương trình:

$$\log_4\{2\log_3[1 + \log_2(1 + 3\log_2 x)]\} = \frac{1}{2}.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\log_3[1 + \log_2(1 + 3\log_2 x)]\} = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_3[1 + \log_2(1 + 3\log_2 x)] = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + \log_2(1 + 3\log_2 x) = 3 \Leftrightarrow \log_2(1 + 3\log_2 x) = 2$$

$$\Leftrightarrow 1 + 3\log_2 x = 4 \Leftrightarrow \log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Nhận xét: Trong ví dụ trên, nếu các em học sinh lựa chọn kiểu trình bày theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện có nghĩa cho phương trình.

Bước 2: Sử dụng phép biến đổi để tìm nghiệm của phương trình.

Bước 3: Kết luận về nghiệm cho phương trình.

thì các em phải thực hiện một công việc khá cồng kềnh và dư thừa ở bước 1.

Ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ dạng biến đổi thứ hai $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

Ví dụ 3: Giải phương trình:

$$\log_{\frac{1}{3}}[\sqrt{2}(x^3 + x^2) - 2] + \log_3(2x + 2) = 0.$$

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\log_3[\sqrt{2}(x^3 + x^2) - 2] = \log_3(2x + 2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2 > 0 \\ \sqrt{2}(x^3 + x^2) - 2 = 2x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x^3 + x^2 - x\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Giải (1), với nhận xét rằng:

$$ac^3 = 1.(-\sqrt{2})^3 = -2\sqrt{2} = bd^3$$

do đó phương trình có nghiệm $x = -\frac{c}{b} = \sqrt{2}$.

Biến đổi phương trình (1) về dạng:

$$(x - \sqrt{2})[x^2 + (\sqrt{2} + 1)x + 2] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \sqrt{2} = 0 \\ x^2 + (\sqrt{2} + 1)x + 2 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{2} > -1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \sqrt{2}$.

Nhận xét: Như vậy, bằng việc sử dụng phép biến đổi tương đương chúng ta đã bỏ qua được việc giải điều kiện:

$$\sqrt{2}(x^3 + x^2) - 2 > 0.$$

Ví dụ tiếp theo sẽ khẳng định thêm hiệu quả to lớn khi sử dụng các phép biến đổi tương đương để thực hiện các bài toán chứa tham số.

Ví dụ 4: Cho phương trình:

$$2\log_4(2x^2 - x + 2m - 4m^2) + \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + mx - 2m^2) = 0,$$

a. Giải phương trình với $m = 1$.

b. Xác định m để phương trình có nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1^2 + x_2^2 > 1$.

Giải

Biến đổi tương đương phương trình về dạng:

$$\log_2(2x^2 - x + 2m - 4m^2) - \log_2(x^2 + mx - 2m^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x^2 - x + 2m - 4m^2) = \log_2(x^2 + mx - 2m^2)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - x + 2m - 4m^2 = x^2 + mx - 2m^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + mx - 2m^2 > 0 \\ x^2 - (m+1)x + 2m - 2m^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + mx - 2m^2 > 0 \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = 2m \\ x_2 = 1 - m \end{array}\right. \end{cases}.$$

a. Với m = 1, ta được:

$$\begin{cases} x^2 + x - 2 > 0 \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy, với m = 1 phương trình có nghiệm duy nhất x = 2.

b. Để bất phương trình có nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1^2 + x_2^2 > 1$ điều kiện là:

$$\begin{cases} (2m)^2 + m(2m) - 2m^2 > 0 \\ (1-m)^2 + m(1-m) - 2m^2 > 0 \\ (2m)^2 + (1-m)^2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < m < 0 \\ \dfrac{2}{5} < m < \dfrac{1}{2} \end{array}\right..$$

Ví dụ 5: Cho phương trình:

$$\log_m[x^2 - (6m-1)x + 9m^2 - 3m + 2] = \log_m(x - m). \quad (1)$$

a. Giải phương trình với m = 2.

b. Xác định m để phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt.

Giải

Biến đổi tương đương phương trình về dạng:

$$\begin{cases} 0 < m \neq 1 \\ x^2 - (6m-1)x + 9m^2 - 3m + 2 = x - m > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m \neq 1 \\ x > m \\ f(x) = x^2 - 6mx + 9m^2 - 2m + 2 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

a. Với m = 2, ta được:

$$\begin{cases} 0 < 2 \neq 1 \\ x > 2 \\ x^2 - 12x + 34 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x = 6 \pm \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 6 \pm \sqrt{2}.$$

Vậy, với m = 2 phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 6 \pm \sqrt{2}$.

b. Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \text{(2) có 2 nghiệm thoả mãn } m < x_1 < x_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ af(m) > 0 \\ S/2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 2 \geq 0 \\ 4m^2 - 2m + 2 > 0 \\ 3m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1.$$

Vậy, với $m > 1$ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Chú ý: Với các bài toán không có dạng cơ bản, cách tốt nhất các em học sinh hãy trình bày theo ba bước như đã biết.

Ví dụ 6: Giải phương trình:

$$\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3 + \log_{\frac{1}{4}}(x+6)^3.$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} (x+2)^2 > 0 \\ 4 - x > 0 \\ x + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -6 < x < -2 \\ -2 < x < 4 \end{array}\right. . \qquad (*)$$

Phương trình viết lại dưới dạng:

$$3\log_{\frac{1}{4}}|x+2| - 3 = 3\log_{\frac{1}{4}}(4-x) + 3\log_{\frac{1}{4}}(x+6)$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}}|x+2| - 1 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x) + \log_{\frac{1}{4}}(x+6)$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}}4|x+2| = \log_{\frac{1}{4}}(4-x)(x+6)$$

$$\Leftrightarrow 4|x + 2| = (4 - x)(x + 6)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4(x+2) = (4-x)(x+6) \\ 4(x+2) = -(4-x)(x+6) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -8 \\ x = 1+\sqrt{33} \\ x = 1-\sqrt{33} \end{array}\right. \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1-\sqrt{33} \end{array}\right. .$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 2$ và $x = 1 - \sqrt{33}$.

Chú ý: Nếu biến đổi $\log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2 = 2\log_{\frac{1}{4}}(x+2)$ sẽ làm mất nghiệm

$$x = 1 - \sqrt{33}.$$

Hãy nhớ rằng:

$$\log_a c^b = b.\log_a|c|,\ \sqrt{a^2} = |a| \text{ và } \sqrt{a.b} = \sqrt{|a|}\sqrt{|b|}$$

ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ thêm cho chú ý này.

Ví dụ 7: Giải phương trình:

$$\lg(x^3 + 8) = \lg(x + 58) + \frac{1}{2}\lg(x^2 + 4x + 4).$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} x^3 + 8 > 0 \\ x + 58 > 0 \\ x^2 + 4x + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2. \qquad (*)$$

Khi đó, phương trình có dạng:

$$\lg(x^3 + 8) = \lg(x + 58) + \frac{1}{2}\lg(x + 2)^2$$

$$\Leftrightarrow \lg(x^3 + 8) = \lg(x + 58) + \lg|x + 2|$$

$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \lg(x^3 + 8) = \lg[(x + 58)(x + 2)]$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 8 = (x + 58)(x + 2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 4 = x + 58 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 54 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 9 \\ x = -6 \ (l) \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có nghiệm x = 9.

Ví dụ 8: Giải phương trình:

$$2(\log_9 x)^2 = \log_3 x.\log_3(\sqrt{2x+1} - 1).$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 2x + 1 \geq 0 \\ \sqrt{2x+1} - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0.$$

Phương trình được viết lại dưới dạng:

$$2(\frac{1}{2}\log_3 x)^2 = \log_3 x.\log_3(\sqrt{2x+1} - 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_3^2 x = \log_3 x.\log_3(\sqrt{2x+1} - 1)$$

$$\Leftrightarrow \log_3^2 x = 2\log_3 x.\log_3(\sqrt{2x+1} - 1)$$

$$\Leftrightarrow [\log_3 x - 2\log_3(\sqrt{2x+1} - 1)]\log_3 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 0 \\ \log_3 x - \log_3(\sqrt{2x+1}-1)^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2x+1-2\sqrt{2x+1}+1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ 2\sqrt{2x+1} = x+2 \end{array}\right. \xleftrightarrow{x>0} \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ 4(2x+1) = (x+2)^2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - 4x = 0 \end{array}\right. \xleftrightarrow{x>0} \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 1$ và $x = 4$.

Ví dụ 9: Cho phương trình:

$$2\log_{m^2+2}(x-1) = \log_{m^2+2}(mx^2+1). \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với $m = 2$.

b. Giải và biện luận phương trình theo m.

Giải

Điều kiện

$$\left\{\begin{array}{l} x-1>0 \\ 0<m^2+2\neq 1 \\ mx^2+1>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x>1 \\ mx^2+1>0 \end{array}\right.. \qquad (*)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\log_{m^2+2}(x-1)^2 = \log_{m^2+2}(mx^2+1)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = mx^2+1 \Leftrightarrow (m-1)x^2+2x = 0 \Leftrightarrow (m-1)x = -2. \quad (2)$$

a. Với $m = 2$, ta được:

$x = -2$, không thoả mãn (*).

Vậy, với $m = 2$ phương trình vô nghiệm.

b. Ta xét các trường hợp:

- Với $m = -1$ thì:

$$(2) \Leftrightarrow 0 = -2 \text{ vô nghiệm.}$$

- Với $m \neq -1$ thì:

$$(2) \Leftrightarrow x = \frac{2}{1-m}.$$

Để nghiệm trên thoả mãn (*), điều kiện là:

$$\frac{2}{1-m} > 1 \Leftrightarrow \frac{1+m}{1-m} > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1.$$

Vậy, với $|m| < 1$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{2}{1-m}$, ngoài ra vô nghiệm.

Ví dụ 10: Cho phương trình:

$$\frac{\lg(mx)}{\lg(x+1)} = 2. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với m = 4.

b. Xác định m để phương trình có nghiệm duy nhất.

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\log_{x+1}(mx) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x+1 \neq 1 \\ mx = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x \neq 0 \\ x^2-(m-2)x+1=0 \quad (2) \end{cases}.$$

a. Với $m = 4$, ta được:

$$\begin{cases} -1 < x \neq 0 \\ x^2-2x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, với $m = 4$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

b. Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có duy nhất nghiệm thoả mãn $-1 < x \neq 0$.

Nhận xét rằng, phương trình (2) không thể có nghiệm $x = 0$ vì $\frac{c}{a} = 1 \neq 0$.

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ phương trình (*) có duy nhất nghiệm thoả mãn $-1 < x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} af(-1) < 0 \\ \begin{cases} \Delta = 0 \\ -\dfrac{b}{2a} > -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ \begin{cases} (m-2)^2-4=0 \\ \dfrac{m-2}{2} > -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 4 \end{array}\right. \\ m > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m = 4 \end{array}\right..$$

Chú ý:

1. Nếu sử dụng phép biến đổi:

$$\begin{cases} 0 < x+1 \neq 1 \\ mx = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x+1 \neq 1 \\ \dfrac{(x+1)^2}{x} = m \end{cases}$$

chúng ta có thể giải bài toán bằng phương pháp đồ thị.

2. Thông qua các ví dụ trên chúng ta đã làm quen được với các phương trình logarit có cùng cơ số hoặc dễ dàng nhận ra cơ số chung của chúng. Các ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ thêm phương pháp đưa về cùng cơ số.

Ví dụ 11: Giải và biện luận phương trình:

$$\log_{2+\sqrt{3}}\sqrt{x^2-3x+2} + \log_{2-\sqrt{3}}\sqrt{x-1} = \log_{7-4\sqrt{3}}[a(x+2)],$$

với $a > 0$.

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} x^2-3x+2>0 \\ x-1>0 \\ a(x+2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2. \qquad (*)$$

Nhận xét rằng:

$$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 1 \Rightarrow 2+\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^{-1},$$

$$7-4\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^2,$$

do đó:

$$\log_{2+\sqrt{3}}\sqrt{x^2-3x+2} = \log_{(2-\sqrt{3})^{-1}}\sqrt{x^2-3x+2} = -\log_{2-\sqrt{3}}\sqrt{x^2-3x+2},$$

$$\log_{7-4\sqrt{3}}[a(x+2)] = \log_{(2-\sqrt{3})^2}[a(x+2)] = \frac{1}{2}\log_{2-\sqrt{3}}[a(x+2)].$$

Khi đó, phương trình có dạng:

$$-\log_{2-\sqrt{3}}\sqrt{x^2-3x+2} + \log_{2-\sqrt{3}}\sqrt{x-1} = \frac{1}{2}\log_{2-\sqrt{3}}[a(x+2)]$$

$$\Leftrightarrow -2\log_{2-\sqrt{3}}\sqrt{x^2-3x+2} + 2\log_{2-\sqrt{3}}\sqrt{x-1} = \log_{2-\sqrt{3}}[a(x+2)]$$

$$\Leftrightarrow -\log_{2-\sqrt{3}}(x^2-3+2) + \log_{2-\sqrt{3}}(x-1) = \log_{2-\sqrt{3}}[a(x+2)]$$

$$\Leftrightarrow \log_{2-\sqrt{3}}\frac{x-1}{x^2-3x+2} = \log_{2-\sqrt{3}}[a(x+2)] \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} = a(x+2)$$

$$\Leftrightarrow a(x^2-4) = 1 \Leftrightarrow x^2 = 4 + \frac{1}{a} \ (>0 \text{ vì } a>0)$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4+\frac{1}{a}} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{4+\frac{1}{a}}.$$

Vậy, với mọi $a > 0$ phương trình luôn có nghiệm $x = \sqrt{4+\frac{1}{a}}$.

Ví dụ 12: Giải phương trình:

$$\log_3 x + \log_4 x = \log_5 x.$$

Giải

Điều kiện $x > 0$.

Ta đi biến đổi về cùng cơ số 3:

$$\log_4 x = \log_4 3.\log_3 x,$$

$$\log_5 x = \log_5 3.\log_3 x.$$

Khi đó, phương trình có dạng:

$$\log_3 x + \log_4 3.\log_3 x = \log_5 3.\log_3 x$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x(1 + \log_4 3 - \log_5 3) = 0 \Leftrightarrow \log_3 x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 1$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các phương trình sau:

a. $\log_x(x + 6) = 3$.

b. $\log_{\cos x}4.\log_{\cos^2 x}2 = 1$.

c. $2^{\log_3\left(\frac{2x-3}{x}\right)} = 1$.

Bài tập 2: Giải các phương trình sau:

a. $\log_2(x - 1)^2 = 2\log_2(x^3 + x + 1)$.

b. $\log_2(x^2 - 1) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 1)$.

c. $\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = \log_{10} x$.

d. $x + \lg(1 + 2^x) = x\lg 5 + \lg 6$.

Bài tập 3: Giải các phương trình sau:

a. $\log_{\frac{1}{3}}[\sqrt{2}(x^3 + x^2) - 2] + \log_3(2x + 2) = 0$.

b. $(x - 1)\log_5 3 + \log_5(3^{x+1} + 3) = \log_5(11.3^x - 9)$.

c. $\log_4(x + 1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}}\sqrt{4 - x} + \log_8(4 + x)^3$.

d. $\log_2(x^2 + 3x + 2) + \log_2(x^2 + 7x + 12) = 3 + \log_2 3$.

e. $\log_2(x^2 + x + 1) + \log_2(x^2 - x + 1) = \log_2(x^4 + x^2 + 1) + \log_2(x^4 - x^2 + 1)$.

Bài tập 4: Cho phương trình:

$$\log_{2-m}(x^2 + mx) = \log_{2-m}(x + m - 1).$$

a. Giải phương trình với $m = 0$.

b. Xác định m để phương trình có nghiệm duy nhất.

Bài tập 5: Cho phương trình:

$$\log_m[x^2 - (6m - 1)x + 9m^2 - 2m - 1] = \log_m(x - 3).$$

a. Giải phương trình với $m = 2$.

b. Xác định m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Bài tập 6: Cho phương trình:

$$\log_3(x^2 + 4mx) + \log_{\frac{1}{3}}(2x - 2m - 1) = 0.$$

a. Giải phương trình với m = 1.

b. Xác định m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Bài tập 7: Cho phương trình:

$$\log_3(9^x + 9m^3) = 3.$$

a. Giải phương trình với m = 1.

b. Xác định m để phương trình có nghiệm duy nhất.

Bài tập 8: Cho phương trình:

$$\log_m(x^2 + mx - 3) = \log_m x.$$

a. Giải phương trình với m = 3.

b. Xác định m để phương trình có nghiệm.

Bài tập 9: Cho phương trình:

$$\frac{\log_5 mx}{\log_5(x+1)} = 2.$$

a. Giải phương trình với m = 5.

b. Xác định m để phương trình có nghiệm duy nhất:

Bài tập 10: Cho phương trình:

$$\frac{\log_x(2m - x)}{\log_x 2} + \frac{\log_m x}{\log_m 2} = \frac{1}{\log_{m^2-1} 2}.$$

a. Giải phương trình với m = 2.

b. Xác định m để phương trình có nghiệm.

Bài tập 11: Cho phương trình:

$$2\log_4(8x^2 - 2x + 2m - 4m^2) + \log_{\frac{1}{2}}(4x^2 + 2mx - 2m^2) = 0.$$

a. Giải phương trình với m = 0.

b. Xác định m để phương trình có nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1^2 + x_2^2 > \frac{1}{4}$

Bài tập 12: Giải và biện luận phương trình:

$$2\lg x - \lg(x - 1) = \lg a.$$

Bài tập 13: Cho phương trình:

$$2\log_{m^2+2}(x - 1) = \log_{m^2+2}(mx^2 + 1).$$

a. Giải phương trình với m = 2.

b. Giải và biện luận phương trình theo m.

Bài tập 14: Cho phương trình:

$$\frac{\lg(mx)}{\lg(x+1)} = 2.$$

a. Giải phương trình với $m = 4$.

b. Xác định m để phương trình có nghiệm duy nhất.

Bài tập 15: Cho phương trình:

$$\log_m[x^2 - (6m-1)x + 9m^2 - 3m + 2] = \log_m(x - m).$$

a. Giải phương trình với $m = 2$.

b. Xác định m để phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt.

Bài tập 16: Giải và biện luận phương trình:

$$\log_{2+\sqrt{3}}\sqrt{x^2-3x+2} + \log_{2-\sqrt{3}}\sqrt{x-1} = \log_{7-4\sqrt{3}}[a(x+2)],$$

với $a > 0$.

Bài toán 2: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 1.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Phương pháp dùng ẩn phụ dạng 1 là việc sử dụng một ẩn phụ để chuyển phương trình ban đầu thành một phương trình với một ẩn phụ.

Ta lưu ý các phép đặt ẩn phụ thường gặp sau:

Dạng 1: Nếu đặt $t = \log_a x$ với $x > 0$ thì

$$\log_a^k x = t^k,$$

$$\log_x a = \frac{1}{t} \text{ với } 0 < x \neq 1.$$

Dạng 2: Ta biết rằng

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a},$$

do đó nếu đặt $t = a^{\log_b x}$ thì $t = x^{\log_b a}$

Tuy nhiên trong nhiều bài toán có chứa $a^{\log_b x}$, ta thường đặt ẩn phụ dần với $t = \log_b x$.

Ví dụ 1: Cho phương trình:

$$\log_2(5^x - 1).\log_4(2.5^x - 2) = m. \quad (1)$$

a. Giải phương trình với $m = 1$.

b. Xác định m để phương trình có nghiệm $x \geq 1$.

Giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1}{2}\log_2(5^x-1).\log_2[2(5^x-1)] = m \Leftrightarrow \log_2(5^x-1).[1+\log_2(5^x-1)] = 2m.$$

Điều kiện:

$$5^x - 1 > 0 \Leftrightarrow 5^x > 1 \Leftrightarrow x > 0.$$

Đặt $t = \log_2(5^x - 1)$, khi đó phương trình có dạng:

$$t(1+t) = 2m \Leftrightarrow f(t) = t^2 + t - 2m = 0. \qquad (2)$$

a. Với m = 1, ta được:

$$t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2(5^x-1) = 1 \\ \log_2(5^x-1) = -2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^x - 1 = 2 \\ 5^x - 1 = 2^{-2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \log_5 3 \\ x = \log_5 \frac{5}{4} \end{array}\right.$$

Vậy, với m = 1 phương trình có hai nghiệm $x = \log_5 3$, $x = \log_5\frac{5}{4}$.

b. Với $x \geq 1$, suy ra:

$$5^x - 1 \geq 5 - 1 = 4 \Leftrightarrow \log_2(5^x-1) \geq \log_2 4 = 2 \Leftrightarrow t \geq 2.$$

Vậy, để phương trình (1) có nghiệm $x \geq 1$

$$\Leftrightarrow \text{(2) có nghiệm } t \geq 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 \leq t_1 \leq t_2 \ (\text{loại vì } t_1 + t_2 = -1) \\ t_1 \leq 2 \leq t_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow a.f(2) \leq 0 \Leftrightarrow 4 + 2 - 2m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 3.$$

Vậy, với $m \geq 3$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Nhận xét:

1. Thông qua ví dụ trên chúng ta đã làm quen với việc sử dụng ẩn phụ dạng 1 là $t = \log_2(5^x - 1)$.

Bằng việc sử dụng các phép biến đổi tương đương, chúng ta đã nhận được điều kiện $t \geq 2$ cho phương trình ẩn phụ xuất phát từ điều kiện $x \geq 1$.

2. Ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ việc sử dụng ẩn phụ cho $t = \log_a x$ thì $\log_x a = \frac{1}{t}$ với $0 < x \neq 1$.

Ví dụ 2: Cho phương trình:

$$m\log_2(3^x + 3) + (m - 5)\log_{3^x + 3} 2 + 2(m - 1) = 0. \quad (1)$$

a. Giải phương trình với $m = 1$.

b. Xác định m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt dương.

Giải

Đặt $t = \log_2(3^x + 3)$ điều kiện $t > \log_2 3$, suy ra $\log_{3^x + 3} 2 = \frac{1}{t}$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$mt + \frac{m - 5}{t} + 2(m - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow f(t) = mt^2 + 2(m - 1)t + m - 5 = 0. \quad (2)$$

a. Với $m = 1$, ta được:

$$t^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -2 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \log_2(3^x + 3) = 2 \Leftrightarrow 3^x + 3 = 4$$

$$\Leftrightarrow 3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, với $m = 1$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

b. Vì $x > 0$ suy ra

$$3^x > 1 \Leftrightarrow 3^x + 3 > 4 \Leftrightarrow \log_2(3^x + 3) > 2 \Leftrightarrow t > 2.$$

Do đó, để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt dương

$\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm thoả mãn $2 < t_1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ af(2) > 0 \\ S/2 > 2 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, không tồn tại m để phương trình có hai nghiệm phân biệt dương.

Ví dụ 3: Giải phương trình:

$$\log_a(ax).\log_x(ax) = \log_{a^2}\left(\frac{1}{a}\right), \text{ với } 0 < a \neq 1.$$

Giải

Điều kiện :

$$\begin{cases} ax > 0 \\ 0 < x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \neq 1.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(\log_a a + \log_a x).(\log_x a + \log_x x) = -\frac{1}{2}\log_a a$$

$$\Leftrightarrow (1 + \log_a x).\left(\frac{1}{\log_a x} + 1\right) = -\frac{1}{2}. \quad (2)$$

Đặt $t = \log_a x$. Khi đó, phương trình (2) có dạng:

$$(1 + t).(\frac{1}{t} + 1) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2t^2 + 5t + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\frac{1}{2} \\ t = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_a x = -\frac{1}{2} \\ \log_a x = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1/\sqrt{a} \\ x = 1/a^2 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có 2 nghiệm $x = \frac{1}{\sqrt{a}}$ và $x = \frac{1}{a^2}$.

Ví dụ 4: Cho phương trình:

$$(m - 2)2^{\log_2^2 x} + (2m - 6)x^{-\log_2 x} - 2(m + 1) = 0. \qquad (1)$$

a. Giải phương trình với m = 10.

b. Xác định m để phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt thuộc $(\frac{1}{2}, 2)$.

Giải.

Điều kiện $x > 0$.

Đặt $u = \log_2 x \Rightarrow x = 2^u$, khi đó phương trình (1) có dạng:

$$(m - 2)2^{u^2} + (2m - 6)(2^u)^{-u} - 2(m + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (m - 2)2^{u^2} + \frac{2m - 6}{2^{u^2}} - 2(m + 1) = 0. \qquad (2)$$

Đặt $t = 2^{u^2}$, điều kiện $t \geq 1$.

Khi đó, phương trình (2) có dạng:

$$f(t) = (m - 2)t^2 - 2(m + 1)t + 2m - 6 = 0. \qquad (3)$$

a. Với m = 10, ta được:

$$8t^2 - 22t + 14 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \frac{7}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{u^2} = 1 \\ 2^{u^2} = \frac{7}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u^2 = 0 \\ u^2 = \log_2 \frac{7}{4} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 0 \\ u = \pm\sqrt{\log_2 \frac{7}{4}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 0 \\ \log_2 x = \pm\sqrt{\log_2 \frac{7}{4}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2^{\pm\sqrt{\log_2 \frac{7}{4}}} \end{array}\right..$$

Vậy, với m = 10 phương trình có ba nghiệm $x = 1$, $x = 2^{\pm\sqrt{\log_2 \frac{7}{4}}}$.

b. Ta có:

$$\frac{1}{2} < x < 2 \Leftrightarrow \log_2\frac{1}{2} < \log_2 x < \log_2 2 \Leftrightarrow -1 < u < 1$$

$$\Leftrightarrow u^2 < 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2^{u^2} < 2.$$

Vậy (1) có 2 nghiệm thuộc $(\frac{1}{2}, 2) \Leftrightarrow$ (3) có 2 nghiệm thuộc $[1, 2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ af(1) \geq 0 \\ af(2) > 0 \\ 1 < S/2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 12m - 11 > 0 \\ (m-2)(m-10) \geq 0 \\ (m-2)(2m-18) > 0 \\ 1 < \dfrac{m+1}{m-2} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 10 \leq m < 11.$$

Vậy, với $10 \leq m < 11$ phương trình có hai nghiệm phân biệt thuộc $(\frac{1}{2}, 2)$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các phương trình sau:

a. $\log_2(3^x - 1).\log_2(2.3^x - 2) = 2.$ b. $\log_2(5^x - 1).\log_2(2.5^x - 2) = 2.$

Bài tập 2: Giải các phương trình sau:

a. $\text{Log}_2(2x^2).\log_x^2 2 = 1.$ c. $\log_{\frac{2}{x}} 2 + \log_2 4x = 3.$

b. $\log_{5x}\frac{5}{x} + \log_5^2 x = 1.$ d. $3^{\log_2 x} + x^{\log_2 3} = 6.$

Bài tập 3: Giải các phương trình sau:

a. $\sqrt{\log_9(3x^2 - 4x + 2)} + 1 = \log_3(3x^2 - 4x + 2).$

b. $\log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}).\log_3(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6|x - \sqrt{x^2 - 1}|.$

Bài tập 4: Giải các phương trình sau:

a. $(x-1)^{\log_2[4(x-1)]} = 4(x-1)^3.$ b. $(x-1)^{\log_2[4(x-1)]} = 8(x-1)^3.$

Bài tập 5: Cho phương trình:

$$m\log_2(3^x + 3) + (m - 5)\log_{3^x+3} 2 + 2(m - 1) = 0.$$

a. Giải phương trình với m = 1.

b. Xác định m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt dương.

Bài tập 6: Cho phương trình:

$$(x-2)^{\log_2 4(x-2)} = 2^{\alpha}(x-2)^3.$$

a. Giải phương trình với $\alpha = 2$.

b. Xác định α để (1) có hai nghiệm phân biệt x, x_2 thoả mãn $\frac{5}{2} \le x_1, x_2 \le 4$.

Bài tập 7: Cho phương trình:

$$(x-2)^{\log_3[9(x-2)]} = 9(x-2)^m.$$

a. Giải phương trình với $m = 3$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm thoả mãn:

$$3x_1x_2 - 6(x_1 + x_2) + 11 = 0.$$

Bài tập 8: Cho phương trình:

$$x^{\lg^2 x^2 - 3\lg x - \frac{9}{2}} = 10^{m\lg x}.$$

a. Giải phương trình với $m = -2$.

b. Xác định m để phương trình có ba nghiệm $x_0 = 1$, và x_1, x_2 khác 1 thoả mãn $x_1 . x_2^4 = 1$.

Bài toán 3: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 2.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ý tưởng của phương pháp này cũng giống như phương pháp đã được sử dụng trong phương trình mũ.

Ví dụ 1: Cho phương trình:

$$\lg^4 x + (2m-1)\lg^3 x + m(m-2)\lg^2 x - (m^2 - m + 1)\lg x - m + 1 = 0.$$

a. Giải phương trình với $m = -1$.

b. Xác định m để phương trình có bốn nghiệm phân biệt.

Giải

Điều kiện $x > 0$.

Đặt $t = \lg x$, phương trình được chuyển về dạng:

$$t^4 + (2m-1).t^3 + m(m-2).t^2 - (m^2 - m + 1).t - m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t - 1 = 0 \\ t^3 + 2mt^2 + m^2 t + m - 1 = 0 \quad (2) \end{array}\right. \qquad \text{(I)}$$

Để tiếp tục phân tích (2), ta viết lại (2) dưới dạng:

$$tm^2 + (2t^2 + 1)m + t^3 - 1 = 0$$

Coi m là ẩn, còn x là tham số, ta được phương trình bậc 2 theo m. Giải ra ta được:

$$\left[\begin{array}{l} m = 1 - t \\ m = -\dfrac{t^2 + t + 1}{t} \end{array}\right.$$

Do đó (2) được chuyển về dạng:

$$(t + m - 1)[t^2 + (m + 1)t + 1] = 0.$$

Khi đó:

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t - 1 = 0 \\ t + m - 1 = 0 \\ g(t) = t^2 + (m+1)t + 1 = 0 \quad (3) \end{array}\right. . \qquad (\mathrm{II})$$

a. Với $m = -1$:

$$(\mathrm{II}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t - 1 = 0 \\ t - 2 = 0 \\ t^2 + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg x = 1 \\ \lg x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10 \\ x = 100 \end{array}\right. .$$

Vậy với $m = -1$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 10$, $x = 100$.

b. Để phương trình có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (3) có 2 nghiệm phân biệt khác 1 và $1 - m$ và $1 - m \neq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_g > 0 \\ g(1) \neq 0 \\ g(1 - m) \neq 0 \\ 1 - m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 3 > 0 \\ m + 3 \neq 0 \\ 3 - 2m \neq 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < m \neq \dfrac{3}{2} \\ m < -3 \end{array}\right. .$$

Vậy với $m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty) \setminus \{\frac{3}{2}\}$ phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải phương trình:

a. $\lg^2 x - \lg x.\log_2(4x) + 2\log_2 x = 0.$

b. $\lg^4 x + \lg^3 x - 2\lg^2 x - 9\lg x - 9 = 0.$

Bài tập 2: Giải phương trình:

$$\log_2^2 x + (x-4)\log_2 x - x + 3 = 0.$$

Bài tập 3: Giải các phương trình:

a. $\lg^2(x^2+1) + (x^2-5).\lg(x^2+1) - 5x^2 = 0.$

b. $\log_3^2(x+1) + (x-5)\log_3(x+1) - 2x + 6 = 0.$

Bài tập 4: Giải các phương trình:

a. $(x+3)\log_3^2(x+2) + 4(x+2)\log_3(x+2) - 16 = 0.$

b. $(x+2)\log_3^2(x+1) + 4(x+1)\log_3(x+1) - 16 = 0.$

Bài toán 4: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 3.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Phương pháp dùng ẩn phụ dạng 3 sử dụng hai ẩn phụ cho hai biểu thức logarit trong phương trình và khéo léo biến đổi phương trình thành phương trình tích.

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$\log_2[x(x-1)^2] + \log_2 x.\log_2(x^2-x) - 2 = 0.$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} x(x-1)^2 > 0 \\ x > 0 \\ x^2 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\log_2\frac{(x^2-x)^2}{x} + \log_2 x.\log_2(x^2-x) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\log_2(x^2-x) + \log_2 x - \log_2 x.\log_2(x^2-x) - 2 = 0$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = \log_2(x^2-x) \\ v = \log_2 x \end{cases}.$$

Khi đó, phương trình tương đương với:

$$2u + v - uv - 2 = 0 \Leftrightarrow (u-1)(v-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 1 \\ v = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2(x^2-x) = 1 \\ \log_2 x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 2 = 0 \\ x = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \text{ (loại)} \\ x = 2 \\ x = 4 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm x = 2, x = 4.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải phương trình:

$$\log_2^2 x - \log_2 x + \log_3 x - \log_2 x.\log_3 x = 0.$$

Bài tập 2: Giải phương trình:

$$(2+\sqrt{2})^{\log_2 x} + x.\,(2-\sqrt{2})^{\log_2 x} = 1 + x^2.$$

Bài tập 3: Cho phương trình:

$$\log_2 x.\log_2(x^2 - 2x + 3) - m\log_2 x - 2\log_2(x^2 - 2x + 3) + 2m = 0$$

a. Giải phương trình với m = 1.

b. Xác định m để phương trình có ba nghiệm phân biệt.

Bài tập 4: Cho phương trình:

$$\lg^2(x^2 + 1) - \lg(x^3 - 2x^2 - 9x + m + 1).\lg(x^2 + 1) =$$

$$= 2\lg\frac{x^3 - 2x^2 - 9x + m + 1}{x^2 + 1}.$$

a. Giải phương trình với m = 0.

b. Xác định m để phương trình có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

Bài toán 5: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 4.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ý tưởng của phương pháp này cũng giống như phương pháp đã được sử dụng trong phương trình mũ.

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$\log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) + 3\log_2(x + \sqrt{x^2 - 1}) = 2.$$

Giải

Điều kiện $x \geq 1$ (*Bạn đọc tự làm cụ thể*).

Đặt:

$$\begin{cases} u = \log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \\ v = \log_2(x + \sqrt{x^2 - 1}) \end{cases}.$$

Nhận xét rằng:

$$u + v = \log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) + \log_2(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_2 1 = 0$$

Khi đó, phương trình được chuyển thành:

$$\begin{cases} u + v = 0 \\ u + 3v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -v \\ 2v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -1 \\ v = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) = -1 \\ \log_2(x + \sqrt{x^2 - 1}) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \sqrt{x^2 - 1} = \dfrac{1}{2} \\ x + \sqrt{x^2 - 1}) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = \frac{5}{4}$.

Ví dụ 2: Với giá trị nào của a thì phương trình:

$$\sqrt[3]{1 - \log_2 x} + \sqrt[3]{1 + \log_2 x} = a$$

có nghiệm.

Giải

Điều kiện $x > 0$.

Đặt:

$$\begin{cases} u = \sqrt[3]{1 - \log_2 x} \\ v = \sqrt[3]{1 + \log_2 x} \end{cases}, \text{ suy ra } u^3 + v^3 = 2.$$

Khi đó phương trình được chuyển thành hệ:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 2 \\ u + v = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u + v)(u^2 + v^2 - uv) = 2 \\ u + v = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(u^2 + v^2 - uv) = 2 \\ u + v = a \end{cases}.$$

a. Nếu $a = 0$, thì hệ vô nghiệm.

b. Nếu $a \neq 0$, thì hệ

$$\begin{cases} u^2 + v^2 - uv = \dfrac{2}{a} \\ u + v = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u + v)^2 - 3uv = \dfrac{2}{a} \\ u + v = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = a \\ uv = \dfrac{1}{3}(a^2 - \dfrac{2}{a}) \end{cases}.$$

Hệ có nghiệm $(S^2 - 4P \geq 0)$

$$\Leftrightarrow a^2 - 4.\frac{1}{3}(a^2 - \frac{2}{a}) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{8 - a^3}{3a} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2 - a}{3a} \geq 0 \Leftrightarrow 0 < a \leq 2.$$

Vậy, phương trình có nghiệm khi $0 < a \leq 2$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải phương trình:

a. $\sqrt[3]{2 - \lg x} = 1 - \sqrt{\lg x - 1}$.

b. $\sqrt{3 + \log_2(x^2 - 4x + 5)} + 2\sqrt{5 - \log_2(x^2 - 4x + 5)} = 6$.

Bài tập 2: Giải và biện luận phương trình:

a. $\sqrt{\log_3 x} + \sqrt{4 - \log_3 x} = m.$

b. $\lg x + \sqrt{1 - \lg^2 x} = m.$

Bài toán 6: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 5.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Phương pháp dùng ẩn phụ dạng 5 là việc sử dụng 1 ẩn phụ chuyển phương trình ban đầu thành một hệ phương trình với 1 ẩn phụ và 1 ẩn x.

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện có nghĩa cho các biểu thức trong phương trình.

Bước 2: Biến đổi phương trình về dạng:

$$f[x, \varphi(x)] = 0$$

Bước 3: Đặt $y = \varphi(x)$, ta biến đổi phương trình thành hệ:

$$\begin{cases} y = \varphi(x) \\ f(x, y) = 0 \end{cases}.$$

Chú ý:

1. Các hệ thu được thông thường là các hệ đối xứng.
2. Ở đây chúng sẽ đi xem xét hai dạng toán cơ bản.

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$\log_2^2 x + \sqrt{\log_2 x + 1} = 1. \qquad (1)$$

Giải

Đặt $u = \log_2 x$.

Khi đó, phương trình được chuyển thành:

$$u^2 + \sqrt{u + 1} = 1. \qquad (2)$$

Điều kiện :

$$\begin{cases} u + 1 \geq 0 \\ 1 - u^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq u \leq 1.$$

Đặt $v = \sqrt{u + 1}$, điều kiện $0 \leq v \leq \sqrt{2}$.

$$\Rightarrow v^2 = u + 1. \qquad (3)$$

Khi đó, phương trình được chuyển thành hệ:

$$\begin{cases} u^2 = 1 - v \\ v^2 = 1 + u \end{cases} \Rightarrow u^2 - v^2 = -(u + v) \Leftrightarrow (u + v)(u - v + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u + v = 0 \\ u - v + 1 = 0 \end{array}\right..$$

- Với v = − u, ta được:

$$u^2 - u - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ u = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \log_2 x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}.$$

- Với u − v + 1 = 0, ta được

$$u^2 + u = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 0 \\ u = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 0 \\ \log_2 x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm là $x = 2^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$, x = 1 và $x = \frac{1}{2}$.

Chú ý:

1. Đối với phương trình logarit có một dạng rất đặc biệt, đó là:

$$s^{ax+b} = c\log_s(dx + e) + \alpha x + \beta$$

với $d = ac + \alpha$ và $e = bc + \beta$. (*)

Với dạng phương trình này, ta thực hiện như sau:

Điều kiện:

$$\begin{cases} 0 < s \neq 1s \\ dx + e > 0 \end{cases}.$$

Đặt $ay + b = \log_s(dx + e)$.

Khi đó phương trình được chuyển thành hệ:

$$\begin{cases} s^{ax+b} = c(ay + b) + \alpha x + \beta \\ ay + b = \log_s(dx + e) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s^{ax+b} = acy + \alpha x + bc + \beta \\ s^{ay+b} = dx + e \end{cases}$$

$$\begin{cases} s^{ax+b} = acy + (d - ac)x + e \quad (1) \\ s^{ay+b} = dx + e \quad (2) \end{cases}. \qquad (I)$$

Trừ theo vế hai phương trình của (I), ta được:

$$s^{ax+b} + acx = s^{ay+b} + acy. \qquad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = s^{at+b} + act$ là hàm đơn điệu trên **R**.

Khi đó (3) được viết lại dưới dạng:

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y.$$

Khi đó (2) có dạng:

$$s^{ax+b} - dx - e = 0. \qquad (4)$$

Dùng phương pháp hàm số để xác định nghiệm của (4)

2. Để sử dụng được phương pháp trên cần phải khéo léo biến đổi phương trình ban đầu về dạng thoả mãn điều kiện (*).

Ví dụ 2: Giải phương trình:

$$7^{x-1} = 6\log_7(6x-5) + 1.$$

Giải

Điều kiện:

$$6x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{6}.$$

Đặt $y - 1 = \log_7(6x-5)$.

Khi đó, phương trình được chuyển thành hệ:

$$\begin{cases} 7^{x-1} = 6(y-1)+1 \\ y-1 = \log_7(6x-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7^{x-1} = 6y-5 & (1) \\ 7^{y-1} = 6x-5 & (2) \end{cases}. \qquad (I)$$

Trừ theo vế hai phương trình của (I), ta được:

$$7^{x-1} + 6x = 7^{y-1} + 6y. \qquad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = 7^{t-1} + 6t$ là hàm đơn điệu trên **R**.

Khi đó (3) được viết lại dưới dạng:

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y.$$

Khi đó (2) có dạng:

$$7^{x-1} - 6x + 5 = 0$$

Xét hàm số $g(x) = 7^{x-1} - 6x + 5$.

- Miền xác định: $D = (\frac{5}{6}, +\infty)$.
- Hàm số đồng biến trên D.

Vậy theo định lý Rôn phương trình $g(x) = 0$ có không quá 2 nghiệm trên D.

Nhận xét rằng $g(1) = g(2) = 0$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 1$ và $x = 2$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải phương trình:

$$\sqrt{\lg x + 1} = \lg^2 x + 4\lg x + 5.$$

Bài tập 2: Giải phương trình:

$$\sqrt{3\log_2 x + 1} = -4\log_2^2 x + 13\log_2 x - 5.$$

Bài tập 3: Giải các phương trình:

a. $\log_2^3 x + 2 = 3\sqrt[3]{3\log_3 x - 2}$.

b. $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x - 1}$.

Bài tập 4: Giải phương trình:

$$6^x = 3\log_6(5x + 1) + 2x + 1.$$

Bài toán 7: Sử dụng tính chất liên tục của hàm số.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ý tưởng của phương pháp này cũng giống như phương pháp đã được sử dụng trong phương trình mũ.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng phương trình:

$$\log_2(2x + 1) = 2^{x-1} \tag{1}$$

có ít nhất một nghiệm.

Giải

Điều kiện:

$$2x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}. \tag{*}$$

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$\log_2(2x + 1) - 2^{x-1} = 0. \tag{2}$$

Xét hàm số $f(x) = \log_2(2x + 1) - 2^{x-1}$ liên tục trên $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Ta có:

$$f(0) = -\frac{1}{2},\ f(1) = \log_2 3 - 1 = \log_2\frac{3}{2}$$

suy ra:

$$f(0)f(1) = -\frac{1}{2}.\log_2\frac{3}{2} < 0,\text{ nên (2) có 1 nghiệm } x_0 \in (0, 1).$$

Vậy, phương trình có ít nhất một nghiệm.

Ví dụ 2: Tìm $a > 1$ để phương trình:

$$ax = \log_{x^2+2}(ax+2). \qquad (1)$$

có nghiệm.

Giải

Điều kiện

$$ax + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{a} \text{ (nhớ rằng } -\frac{1}{a} < -1 \text{ với } a > 1). \qquad (*)$$

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$ax - \log_{x^2+1}(ax+1) = 0. \qquad (2)$$

Xét hàm số $f(x) = ax - \log_{x^2+1}(ax+1)$ liên tục trên $(-\frac{1}{a}, +\infty)$.

Ta có:

$$f(0) = -1,\ f(a) = a^2 - 1$$

suy ra:

$f(0)f(1) = -1.(a^2 - 1) < 0$ với $a > 1$, nên (2) có 1 nghiệm $x_0 \in (0, a)$.

Vậy, phương trình có nghiệm với mọi $a > 1$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Chứng minh rằng phương trình sau có ít nhất một nghiệm:

$$\log_3(2x+1) = 3^{1-2x}.$$

Bài tập 2: Chứng minh rằng phương trình sau có ít nhất một nghiệm:

$$\log_2(2x+1) = 2^{x-1}.$$

Bài tập 3: Chứng minh rằng phương trình sau có 3 nghiệm thuộc $(\frac{1}{4}, 4)$:

$$2\log_2^3 x - 6\log_2 x + 1 = 0.$$

Bài toán 8: Sử dụng tính chất đơn điệu của hàm số .

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ý tưởng của phương pháp này cũng giống như phương pháp đã được sử dụng trong phương trình mũ.

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$\log_2(x^2 - 4) + x = \log_2[8(x+2)].$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$$

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$\log_2(x^2-4)-\log_2(x+2)=3-x \Leftrightarrow \log_2\frac{x^2-4}{x+2}=3-x$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-2)=3-x.$$

Nhận xét rằng:

- Hàm số $y=\log_2(x-2)$ là hàm đồng biến.
- hàm số $y=3-x$ là hàm nghịch biến.
- Vậy, phương trình nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.
- Nhận xét rằng $x=3$ là nghiệm của phương trình.

Vậy, phương trình có nghiệm $x=3$.

Ví dụ 2: Giải phương trình:

$$2^{\log_3(x+1)}=x.$$

Giải

Điều kiện:

$$x+1>0 \Leftrightarrow x>-1.$$

a. Nếu $-1<x\le 0$, thì phương trình vô nghiệm.

b. Xét $x>0$.

Đặt $y=\log_3(x+1)$.

Ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} y=\log_3(x+1) \\ x=2^y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=3^y \\ x=2^y \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2^y+1=3^y \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^y+\left(\frac{1}{3}\right)^y=1. \qquad (1)$$

Hàm số $Y=\left(\frac{2}{3}\right)^y+\left(\frac{1}{3}\right)^y$ là hàm nghịch biến.

Ta có:

- Với $y=1$, $f(1)=1$ do đó $y=1$ là nghiệm của phương trình (1).
- Với $y>1$, $f(y)<f(1)=1$ do đó phương trình (1) vô nghiệm.
- Với $y<1$, $f(y)>f(1)=1$ do đó phương trình (1) vô nghiệm.

Vậy $y=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (1). Suy ra $x=2$.

Vậy, phương trình có nghiệm $x=2$.

Ví dụ 3: Giải phương trình:

$$\log_2(x + 3^{\log_6 x}) = \log_6 x.$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} x + 3^{\log_6 x} > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0.$$

Đặt $t = \log_6 x$, suy ra $x = 6^t$.

Phương trình được chuyển về dạng:

$$\log_2(6^t + 3^t) = t \Leftrightarrow 6^t + 3^t = 2^t \Leftrightarrow 3^t + \left(\frac{3}{2}\right)^t = 1. \qquad (1)$$

Hàm số $y = 3^t + \left(\frac{3}{2}\right)^t$ là hàm đồng biến.

Ta có:

- Với $t = -1$, $f(-1) = 1$ do đó $t = -1$ là nghiệm của phương trình (1).
- Với $t > -1$, $f(t) > f(-1) = 1$ do đó phương trình (1) vô nghiệm.
- Với $t < -1$, $f(t) < f(-1) = 1$ do đó phương trình (1) vô nghiệm.

Vậy $t = -1$ là nghiệm duy nhất của (1).

Suy ra $\log_6 x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$.

Vậy, phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{6}$.

Ví dụ 4: Giải phương trình:

$$x^2 + 3^{\log_2 x} = x^{\log_2 5}. \qquad (1)$$

Giải

Đặt $t = \log_2 x \Rightarrow x = 2^t$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$(2^t)^2 + 3^t = (2^t)^{\log_2 5} \Leftrightarrow 4^t + 3^t = 5^t$$

Chia hai vế phương trình cho $5^t \neq 0$, ta được:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^t + \left(\frac{3}{5}\right)^t = 1. \qquad (2)$$

Nhận xét rằng:

- Vế trái của phương trình là một hàm nghịch biến.
- Vế phải của phương trình là một hàm hằng.
- Do vậy, nếu phương trình có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.
- Ta thấy t = 2 là nghiệm của phương trình (2) vì $\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$.

Với $t = 2 \Leftrightarrow \log_2 x = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy x = 1 là nghiệm duy nhất của phương trình.

Chú ý: Ta xét dạng phương trình lặp:

$$f[f(x)] = x,$$

trong đó f(x) là hàm đồng biến trên tập xác định D.

Khi đó ta thực hiện:

Đặt y = f(x)

Khi đó phương trình được chuyển thành hệ:

$$\begin{cases} f(y) = x & (1) \\ y = f(x) & (2) \end{cases}. \qquad (I)$$

Cộng theo vế hai phương trình của (I), ta được:

$$f(y) + y = f(x) + x. \qquad (3)$$

Xét hàm số A(t) = f(t) + t là hàm đồng biến trên D (bởi f(t) là hàm đồng biến).

Khi đó (3) được viết lại dưới dạng:

$$A(x) = A(y) \Leftrightarrow x = y.$$

Khi đó (1) có dạng:

$$f(x) = x. \qquad (4)$$

Dùng phương pháp hàm số để xác định nghiệm của (4).

Ví dụ sau sẽ minh hoạ cụ thể dạng phương trình kiểu này.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các phương trình:

a. $\log_2 x + \sqrt{2^x + 2} = 2$.

b. $\dfrac{3}{2^x + \sqrt{1 + \log_2 x}} = 1$.

Bài tập 2: Giải các phương trình:

a. $\log_2^2 x + (x - 5)\log_2 x - 2x + 6 = 0$.

b. $\lg(x^2 - x - 6) + x = \lg(x + 2) + 4$.

Bài tập 3: Giải các phương trình:

a. $\log_2(1 + \sqrt[3]{x}) = \log_7 x$.

b. $\log_7 x = \log_3(\sqrt{x} + 2)$.

c. $3\log_3(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) = 2\log_2 \sqrt{x}$.

d. $2\log_6(\sqrt[4]{x} + \sqrt[8]{x}) = \log_4 \sqrt{x}$.

Bài tập 4: Giải các phương trình:

a. $2\log_3(\text{cotg}x) = \log_2(\cos x)$.

b. $2^{\log_5(x+3)} = x$.

c. $\log_x(x + 1) = \lg\frac{3}{2}$.

d. $\log_{x+3}(3 - \sqrt{x^2 - 2x + 1}) = \frac{1}{2}$.

Bài tập 5: Giải các phương trình:

a. $\log_3 x = \log_2(\sqrt{x} + 1)$.

b. $\log_3(\sqrt{x} + 2) = \log_2(\sqrt{x} + 1)$.

Bài tập 6: Giải các phương trình:

a. $\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}(x^2 - 2x - 2) = \log_{2+\sqrt{3}}(x^2 - 2x - 3)$.

b. $\log_3(\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 2) + \left(\frac{1}{5}\right)^{3x - x^2 - 1} = 2$.

c. $\log_{\sqrt[4]{5}}(x^2 - 2x - 3) = 2\log_2(x^2 - 2x - 4)$.

Bài tập 7: Xác định a để phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt:

$$4^{-|x-a|}\log_{\sqrt{2}}(x^2 - 2x + 3) + 2^{-x^2+2x}\log_{\frac{1}{2}}(2|x - a| + 2) = 0$$

Bài tập 8: Giải và biện luận phương trình:

$$2^{x^2}\log_2(x^2 + 2) = 4^{|x+a|}[\log_2(2|x + a| + 2)].$$

Bài tập 9: Giải và biện luận phương trình:

$$\log_2\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \log_{\frac{1}{2}}(x - m) = x - m - \sqrt{x^2 - 3x + 2}.$$

Bài toán 9: Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ý tưởng của phương pháp này cũng giống như phương pháp đã được sử dụng trong phương trình mũ.

Ví dụ 1: Tìm a để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\log_{3\sqrt{2}}(\sqrt{4-x}+\sqrt{x+5}) = a. \qquad (1)$$

Giải

Điều kiện cần: Giả sử (1) có nghiệm x_0, khi đó:

$$\log_{3\sqrt{2}}(\sqrt{4-x_0}+\sqrt{x_0+5}) = a$$

$$\Leftrightarrow \log_{3\sqrt{2}}(\sqrt{(-1-x_0)+5}+\sqrt{4-(-1-x_0)}) = a$$

Tức là khi đó $-1-x_0$ cũng là nghiệm của (1).

Vậy (1) có nghiệm duy nhất khi $x_0 = -1-x_0 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{1}{2}$.

Với $x_0 = -\frac{1}{2}$, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \log_{3\sqrt{2}}\left(\sqrt{4+\frac{1}{2}}+\sqrt{-\frac{1}{2}+5}\right) = a \Leftrightarrow a = 1.$$

Vậy a = 1 là điều kiện cần để phương trình có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ: Với a = 1, phương trình (1) có dạng :

$$\log_{3\sqrt{2}}(\sqrt{4-x}+\sqrt{x+5}) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{4-x}+\sqrt{x+5} = 3\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-x \geq 0 \\ x+5 \geq 0 \\ 4-x+x+5+2\sqrt{(4-x)(x+5)} = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 4 \\ 2\sqrt{(4-x)(x+5)} = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 4 \\ 4(4-x)(x+5) = 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 4 \\ 4x^2+4x+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Vậy, a = 1 là điều kiện cần để phương trình có nghiệm duy nhất.

Chú ý: Trong phần xác định điều kiện cần ta có thể sử dụng:

a. Bất đẳng thức Bunhiacôpski như sau:

$$\sqrt{4-x}+\sqrt{x+5} \leq \sqrt{(1+1)(4-x+x+5)} = 3\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \log_{3\sqrt{2}}(\sqrt{4-x}+\sqrt{x+5}) \leq 1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\frac{\sqrt{4-x}}{1} = \frac{\sqrt{x+5}}{1} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

b. Bất đẳng thức Côsi như sau:

$$(\sqrt{4-x} + \sqrt{x+5})^2 = 4 - x + x + 5 + 2\sqrt{(4-x)(x+5)}$$

$$\le 9 + (4-x) + (x+5) = 18$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4-x} + \sqrt{x+5} \le 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \log_{3\sqrt{2}}(\sqrt{4-x} + \sqrt{x+5}) \le 1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\sqrt{4-x} = \sqrt{x+5} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

Ví dụ 2: Tìm m để phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x \ge -2$:

$$\lg(x-m)^2 = 2(x+4). \qquad (1)$$

Giải

Điều kiện $x \ne m$.

Trước hết để phương trình nghiệm đúng với mọi $x \ge -2$, ta phải có $m < -2$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\lg|x-m| = 2(x+4) \Leftrightarrow |x-m| = x+4. \qquad (2)$$

Điều kiện cần: Phương trình nghiệm đúng với $\forall x \ge -2 \Rightarrow x = -2$ là nghiệm của (2), tức là:

$$|m+2| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m = 0 & (l) \\ m = -4 \end{array}\right. .$$

Đó chính là điều kiện cần để phương trình nghiệm đúng với $\forall x \ge -2$.

Điều kiện đủ: Với $m = -4$, ta có:

$$|x+4| = x+4 \overset{x \ge -2}{\Leftrightarrow} x+4 = x+4 \text{ luôn đúng.}$$

Vậy với $m = -4$ phương trình nghiệm đúng với $\forall x \ge -2$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tìm x để phương trình sau nghiệm đúng với mọi a:

$$\log_{a^2+2}(\sqrt{x+3} - 1) = \log_{a^2x^2+2}(2 - \sqrt{x}).$$

Bài tập 2: Cho phương trình

$$\log_2(mx^3 - 5mx^2 + \sqrt{6-x}) = \log_{2+m}(3 - \sqrt{x-1}).$$

a. Giải phương trình với $m = 0$.

b. Tìm các giá trị của x nghiệm đúng phương trình đã cho với mọi $m \ge 0$.

Bài tập 3: Cho phương trình

$$2\log_{a^2+2}(4-\sqrt{7+2x}) = \log_{a^2x^2+2}(4-3x).$$

a. Giải phương trình với $a = 0$.

b. Tìm các giá trị của x nghiệm đúng phương trình đã cho với mọi $m \ge 0$.

Bài tập 4: Cho phương trình

$$\log_2(a^2x^2 + 5a^2x + \sqrt{6-x}) = \log_{a^2+2}(3-\sqrt{x-1}).$$

a. Giải phương trình với $a = 0$.

b. Tìm các giá trị của x nghiệm đúng phương trình đã cho với mọi $m \ge 0$.

Bài toán 10: Sử dụng phương pháp đánh giá.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ý tưởng của phương pháp này cũng giống như phương pháp đã được sử dụng trong phương trình mũ.

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$\log_{3\sqrt{2}}(\sqrt{4-x}+\sqrt{x+5}) = 1. \qquad (1)$$

Giải

Cách 1: Theo bất đẳng thức Bunhiacôpski ta có:

$$\sqrt{4-x}+\sqrt{x+5} \le \sqrt{(1+1)(4-x+x+5)} = 3\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \log_{3\sqrt{2}}(\sqrt{4-x}+\sqrt{x+5}) \le 1.$$

Vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\frac{\sqrt{4-x}}{1} = \frac{\sqrt{x+5}}{1} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$ là nghiệm duy nhất.

Cách 2: Theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$(\sqrt{4-x}+\sqrt{x+5})^2 = 4 - x + x + 5 + 2\sqrt{(4-x)(x+5)}$$

$$\le 9 + (4-x) + (x+5) = 18$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4-x}+\sqrt{x+5} \le 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \log_{3\sqrt{2}}(\sqrt{4-x}+\sqrt{x+5}) \le 1.$$

Vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\sqrt{4-x} = \sqrt{x+5} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$ là nghiệm duy nhất.

Ví dụ 2: Giải phương trình:

$$\log_3(x^2 + x + 1) - \log_3 x = 2x - x^2.$$

Giải

Điều kiện

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0. \qquad (1)$$

Phương trình được viết lại dưới dạng:

$$\log_3 \frac{x^2 + x + 1}{x} = 2x - x^2 \Leftrightarrow \log_3(x + \frac{1}{x} + 1) = 1 - (x - 1)^2. \qquad (2)$$

Nhận xét rằng:

- Với $x > 0$, thì

$$x + \frac{1}{x} + 1 \geq 2 + 1 = 3 \Rightarrow \log_3(x + \frac{1}{x} + 1) \geq \log_3 3 = 1, \text{ tức là VT} \geq 1.$$

- $1 - (x - 1)^2 \leq 1$, tức là $VP \leq 1$.

Phương trình có nghiệm khi:

$$\begin{cases} VT = 1 \\ VP = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các phương trình:

a. $\log_2^2 x - 2(x - 1)\log_2 x + 2x^2 - 6x + 5 = 0.$

b. $\log_{\frac{1}{3}}(3 + |\sin x|) = 2^{|x|} - 2.$

Bài tập 2: Giải phương trình:

$$\log_2(x + |x| - 1) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Bài tập 3: Giải phương trình:

$$\sin x + \cos x - \sin x.\cos x = 1 + \lg\frac{\sin x + \cos x + 3}{\sin x.\cos x + 4}.$$

Bài tập 4: Giải và biện luận theo tham số a phương trình:

$$\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax} + \log_x \sqrt[4]{ax}} + \sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{x}{a}} - \log_x \sqrt[4]{\frac{x}{a}}} = \sqrt{\log_a x}.$$

CHỦ ĐỀ 2

BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Định nghĩa: Bất phương trình logarit là bất phương trình chứa ẩn ở dưới dấu logarit.

II. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

Bài toán 1: Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương .

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để chuyển ẩn số khỏi loga người ta có thể mũ hoá theo cùng một cơ số cả hai vế của bất phương trình. Chúng ta lưu ý các phép biến đổi cơ bản sau:

Dạng 1: Với bất phương trình:

$$\log_a f(x) < \log_a g(x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ 0 < f(x) < g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > g(x) > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ (a-1)[f(x) - g(x)] < 0 \end{cases}$$

Dạng 2: Với bất phương trình:

$$\log_a f(x) < b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ 0 < f(x) < a^b \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > a^b \end{cases} \end{array}\right.$$

Dạng 3: Với bất phương trình:

$$\log_a f(x) > b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > a^b \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < f(x) < a^b \end{cases} \end{array}\right.$$

Chú ý: Cần lưu ý tới giá trị của cơ số a đối với các bất phương trình logarit.

Ví dụ 1: Giải bất phương trình:

$$\log_x(3x-1) > \log_x(x^2+1).$$

Giải

Bất phương trình tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>1\\ 3x-1>x^2+1\end{cases}\\ \begin{cases}0<x<1\\ 0<3x-1<x^2+1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>1\\ x^2-3x+2<0\end{cases}\\ \begin{cases}0<x<1\\ 3x-1>0\\ x^2-3x+2>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>1\\ 1<x<2\end{cases}\\ \begin{cases}0<x<1\\ x>1/3\\ x>2 \vee x<1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1<x<2\\ \frac{1}{3}<x<1\end{array}\right.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x \in (\frac{1}{3}, 2)\backslash\{1\}$.

Chú ý: Cũng co thể sử dụng cách trình bày như sau:

$$\begin{cases}0<x\neq 1\\ 3x-1>0\\ x^2+1>0\\ (x-1)(3x-1-x^2-1)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0<x\neq 1\\ x>\frac{1}{3}\\ (x-1)(x^2+3x+2)<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq 1\\ \frac{1}{3}<x<2\end{cases}.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x \in (\frac{1}{3}, 2)\backslash\{1\}$.

Ví dụ 2: Cho bất phương trình:

$$\log_a(x^2-4x+a+1) > 0. \qquad (1)$$

a. Giải bất phương trình với a = 3.

b. Tìm a để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Bất phương trình tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1\\ x^2-4x+a+1>1\end{cases}\\ \begin{cases}0<a<1\\ 0<x^2-4x+a+1<1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\begin{cases}a>1\\ x^2-4x+a>0\ (1)\end{cases} & \text{(I)}\\ \begin{cases}0<a<1\\ x^2-4x+a+1>0\\ x^2-4x+a<0\end{cases} & \text{(II)}\end{array}\right.$$

a. Với a = 3, ta được:

$$x^2-4x+3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>3\\ x<1\end{array}\right..$$

Vậy, với a = 3 bất phương trình có nghiệm là tập $(-\infty, 1)\cup(3, +\infty)$.

b. Để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\text{(I) đúng } \forall x \\ \text{(II) đúng } \forall x \text{ (loại vì } x = \dfrac{a}{4} \text{ không đúng)}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \Delta'_{(1)} < 0 \Leftrightarrow 4 - a < 0 \Leftrightarrow a > 4.$$

Vậy với a > 4, bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Cách 2: Bất phương trình tương đương với:

$$\log_a(x^2 - 4x + a + 1) > \log_a 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ x^2 - 4x + a + 1 > 0 & (2) \\ (a-1)(x^2 - 4x + a) > 0 & (3) \end{cases}. \qquad \text{(III)}$$

a. Với a = 3, ta được:

$$\begin{cases} 0 < 3 \neq 1 \\ x^2 - 4x + 3 + 1 > 0 \\ (3-1)(x^2 - 4x + 3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < 1 \end{array}\right..$$

Vậy, với a = 3 bất phương trình có nghiệm là tập $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

b. Để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x

$\Leftrightarrow$ (III) nghiệm đúng với mọi x $\Leftrightarrow$ (2) và (3) nghiệm đúng với mọi x

- (2) nghiệm đúng với mọi x

  $$\Leftrightarrow \Delta'_{(2)} < 0 \Leftrightarrow 4 - a - 1 < 0 \Leftrightarrow a > 3.$$
  (*)

- (3) nghiệm đúng với mọi x

  $$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} x^2 - 4x + a > 0, \forall x \Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow 4 - a < 0 \Leftrightarrow a > 4.$$

Vậy, với a > 4, bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các bất phương trình:

a. $\log_2 \sqrt{x^2 + 1} < \log_2(-2x - 2)$.

b. $\log_{1/5}(x^2 - 6x + 8) + 2\log_5(x - 4) > 0$.

c. $\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < 1$.

d. $\log_x(5x^2 - 8x + 3) > 2$.

Bài tập 2: Giải các bất phương trình:

a. $|\log_3 x - 2| < 1$.　　b. $|1 + \log_x 2000| < 2$.

Bài tập 3: Giải các bất phương trình:

a. $\sqrt{\log_3 \dfrac{2x-3}{1-x}} < 1$.　　c. $\dfrac{\log_3(3^x - 1)}{x-1} \ge 1$.

b. $\log_x(x - \dfrac{1}{4}) \ge 2$.　　d. $\log_{x^2}\left(\dfrac{4x-2}{|x-2|}\right) \ge \dfrac{1}{2}$.

Bài tập 4: Giải các bất phương trình:

a. $(0{,}08)^{\log_{x-0.5} x} \ge \left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)^{\log_{x-0.5}(2x-1)}$.

b. $0{,}12^{\log_{x-1} x} \ge \left(\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\right)^{\log_{x-1}(2x-1)}$.

c. $5^{\log_3 \frac{x-2}{x}} < 1$.

d. $\log_{2/3} \log_3 |x - 3| \ge 0$.

e. $\log_{1/2}[\log_4(x^2 - 5)] > 0$.

f. $(4^x - 12.2^x + 32)\log_2(2x - 1) \le 0$.

Bài tập 5: Giải và biện luận các bất phương trình:

a. $\log_a(1 - 4a^{-x}) \ge 2(1 - x)$.　　b. $\log_a(1 - 8a^{-x}) \ge 2(1 - x)$.

Bài tập 6: Cho bất phương trình:

$$\log_{\frac{1}{2}}[\log_2(3^x + 1)] > \log_2 \frac{1}{m}.$$

a. Giải bất phương trình với m = 2.

b. Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x < 0$.

Bài tập 7: Cho bất phương trình:

$$\log_2(x^2 - 17) \ge \log_2(4mx - 12).$$

a. Giải bất phương trình với m = 1.

b. Tìm m để tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty, -5]$.

Bài tập 8: Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm:

$$\log_{x+m}[x(m - x)] < \log_{x+m} x.$$

Bài tập 9: Tìm các nghiệm (x, y) của bất phương trình:

$$\log_{x^2+y^2}(x + y) \ge 1$$

có tổng x + 2y lớn nhất.

Bài toán 2: Sử dụng các phép biến đổi logarit.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta sử dụng các phép biến đổi logarit đã biết.

Ví dụ 1: Giải bất phương trình:

$$\log_2 x > \log_3 x.$$

Giải

Điều kiện $x > 0$.

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\log_2 x > \log_3 2.\log_2 x \Leftrightarrow (1 - \log_3 2)\log_2 x > 0$$

$$\overset{\log_3 2<1}{\Leftrightarrow} \log_2 x > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x > 0$.

Ví dụ 2: Giải và biện luận bất phương trình:

$$\frac{\log_x(2m-x)}{\log_x 2} + \frac{\log_m x}{\log_m 2} \geq \frac{1}{\log_{m^2-1} 2}. \qquad (1)$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ 0 < m \neq 1 \\ 2m - x > 0 \\ 0 < m^2 - 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < m \neq \sqrt{2} \\ x \neq 1 \\ 0 < x < 2m \end{cases}.$$

Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$\log_2(2m - x) + \log_2 x \geq \log_2(m^2 - 1)$$

$$\Leftrightarrow \log_2[(2m - x)x] \geq \log_2(m^2 - 1)$$

$$\Leftrightarrow (2m - x)x \geq m^2 - 1 \Leftrightarrow m^2 + 2mx + x^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow (x - m)^2 \leq 1 \Leftrightarrow m - 1 \leq x \leq m + 1$$

Vậy :

- Với $1 < m < 2$ và $m \neq \sqrt{2}$, (1) có nghiệm $x \in [m - 1, m + 1]\backslash\{1\}$.
- Với $m = 2$, (1) có nghiệm $x \in (1, 3]$.
- Với $m > 2$, (1) có nghiệm $x \in [m - 1, m + 1]$.
- Với $m \leq 1$ hoặc $m = \sqrt{2}$, (1) vô nghiệm.

Ví dụ 3: Cho bất phương trình:

$$2^{(\log_2 x)^2} + x^{\log_2 x} \le 2m.$$

a. Giải bất phương trình với m = 16.

b. Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in [\frac{1}{2}, 2]$.

Giải

Điều kiện x > 0.

Ta sử dụng phép biến đổi:

$$2^{(\log_2 x)^2} = \left(2^{\log_2 x}\right)^{\log_2 x} = x^{\log_2 x}.$$

Khi đó bất phương trình có dạng:

$$x^{\log_2 x} + x^{\log_2 x} \le 2m \Leftrightarrow x^{\log_2 x} \le m.$$

Với điều kiện m > 0, lấy logarit cơ số 2 hai vế, ta được:

$$\begin{cases} m > 0 \\ \log_2 x^{\log_2 x} \le \log_2 m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \log_2 x.\log_2 x \le \log_2 m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \log_2^2 x \le \log_2 m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \log_2 m \ge 0 \\ -\sqrt{\log_2 m} \le \log_2 x \le \sqrt{\log_2 m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 1 \\ 2^{-\sqrt{\log_2 m}} \le x \le 2^{\sqrt{\log_2 m}} \end{cases}. \quad \text{(I)}$$

a. Với m = 16, ta được:

$$\begin{cases} 16 \ge 1 \\ 2^{-\sqrt{\log_2 16}} \le x \le 2^{\sqrt{\log_2 16}} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \le x \le 4.$$

Vậy, với m = 16 bất phương trình có nghiệm $\frac{1}{4} \le x \le 4$.

b. Để bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in [\frac{1}{2}, 8]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 1 \\ 2^{-\sqrt{\log_2 m}} \le \frac{1}{2} < 8 \le 2^{\sqrt{\log_2 m}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 1 \\ 2^{-\sqrt{\log_2 m}} \le 1/2 \\ 2^{\sqrt{\log_2 m}} \ge 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 1 \\ -\sqrt{\log_2 m} \le -1 \\ \sqrt{\log_2 m} \ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 1 \\ \sqrt{\log_2 m} \ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 1 \\ \log_2 m \ge 9 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 2^9.$$

Vậy, với $m \ge 2^9$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các bất phương trình:

a. $3^{(\log_3 x)^2} + x^{\log_3 x} \le 6.$

b. $\log_3 x > \log_5 x.$

c. $\dfrac{\log_a(35 - x^3)}{\log_a(5 - x)} > 3.$

Bài tập 2: Giải các bất phương trình:

a. $\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}}(1 + \sqrt[3]{x - 1}).$

b. $\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}(x - 1) > \log_{\frac{1}{2}}(1 + \sqrt[3]{x - 2}).$

Bài tập 3: Với $0 < a \neq 1$, giải bất phương trình:

$$a^{\log_a^2 x} + x^{\log_a x} < 2a.$$

Bài tập 4: Giải và biện luận các bất phương trình:

$$x^{\log_a x + 1} > a^2 x.$$

Bài toán 3: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 1.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Mục đích chính của phương pháp này là chuyển các bài toán đã cho về bất phương trình đại số quen biết đặc biệt là các bất phương trình bậc 2 hoặc các hệ bất phương trình.

Ví dụ 1: Giải bất phương trình :

$$\log_2^4(x) - \log_{\frac{1}{2}}^2\left(\frac{x^3}{8}\right) + 9\log_2\left(\frac{32}{x^2}\right) < 4\log_{\frac{1}{2}}^2(x).$$

Giải

Điều kiện $x > 0$.

Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\log_2^4(x) - \log_{2^{-1}}^2\left(\frac{x^3}{8}\right) + 9\log_2\left(\frac{32}{x^2}\right) < 4\log_{2^{-1}}^2(x)$$

$$\Leftrightarrow \log_2^4(x) - [\log_2 x^3 - \log_2 8]^2 + 9[\log_2 32 - \log_2 x^2] < 4\log_2^2(x)$$

$$\Leftrightarrow \log_2^4(x) - [3\log_2 x - 3]^2 + 9[5 - 2\log_2 x] < 4\log_2^2(x)$$

Đặt $t = \log_2 x$, ta được:

$$t^4 - (3t-3)^2 + 9(5-2t) < 4t^2 \Leftrightarrow t^4 - 13t^2 + 36 < 0 \Leftrightarrow 4 < t^2 < 9$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 < t < -2 \\ 2 < t < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 < \log_2 x < -2 \\ 2 < \log_2 x < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{8} < x < \dfrac{1}{4} \\ 4 < x < 8 \end{array}\right. .$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $x \in (\frac{1}{8}, \frac{1}{4}) \cup (4, 8)$.

Chú ý: Trong ví dụ trên các em học sinh cần lưu ý khi thực hiện các phép biến đổi cho hai toán tử:

$$\log^2_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^3}{8}\right) = \left[\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^3}{8}\right)\right]^2 = \left[-\log_2\left(\frac{x^3}{8}\right)\right]^2 = \left[\log_2\left(\frac{x^3}{8}\right)\right]^2$$

$$= [\log_2 x^3 - \log_2 8]^2$$

$$\log^2_{\frac{1}{2}}(x) = \left[\log_{\frac{1}{2}}(x)\right]^2 = (-\log_2 x)^2 = \log^2_2(x).$$

Ví dụ 2: Cho bất phương trình:

$$\log_2(2^x + 2) + 2m\log_{2^x+2} 2 - 3 > 0. \qquad (1)$$

a. Giải bất phương trình với $m = -2$.

b. Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x > 1$.

Giải

Đặt $t = \log_2(2^x + 2)$, điều kiện $t > 1 \Rightarrow \log_{2^x+2} 2 = \frac{1}{t}$.

Khi đó, bất phương trình có dạng:

$$t + \frac{2m}{t} - 3 > 0 \Leftrightarrow f(t) = t^2 - 3t + 2m > 0. \qquad (2)$$

a. Với $m = -2$, ta được:

$$t^2 - 3t - 4 > 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} t > 4 \Leftrightarrow \log_2(2^x + 2) > 4$$

$$\Leftrightarrow 2^x + 2 > 16 \Leftrightarrow x > \log_2 14.$$

Vậy, với $m = -2$ bất phương trình có nghiệm $x > \log_2 14$.

b. Ta có:

$$x > 1 \Leftrightarrow 2^x > 2 \Leftrightarrow 2^x + 2 > 4 \Leftrightarrow \log_2(2^x + 2) > \log_2 4 \Leftrightarrow t > 2.$$

Vậy, để bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x > 1$

$\Leftrightarrow$ (2) nghiệm đúng với $\forall t > 2$

$\Leftrightarrow$ $f(t) = 0$ vô nghiệm hoặc có hai nghiệm thoả mãn $t_1 \le t_1 \le 2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta_{(2)} < 0 \\ \left\{\begin{array}{l} \Delta_{(2)} \ge 0 \\ af(2) \ge 0 \\ \dfrac{S}{2} \le 2 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9 - 8m < 0 \\ \left\{\begin{array}{l} 9 - 8m \ge 0 \\ 4 - 6 + 2m \ge 0 \\ \dfrac{3}{2} \le 2 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \dfrac{9}{8} \\ \left\{\begin{array}{l} m \le \dfrac{9}{8} \\ m \ge 1 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow m \ge 1.$$

Vậy, với $m \ge 1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Chú ý: Trong phép biến đổi bất phương trình trên, do đánh giá được $t > 1$ nên chúng ta bỏ được mẫu số.

Ví dụ 3: Với $0 < a \ne 1$, giải và biện luận bất phương trình:

$$a^{\log_a^2 a} + x^{\log_a x} \ge 2a^4. \qquad (1)$$

Giải

Điều kiện: $x > 0$.

Đặt $t = \log_a x \Rightarrow x = a^t$.

Khi đó, bất phương trình (1) có dạng :

$$a^{t^2} + (a^t)^t \ge 2a^4 \Leftrightarrow 2a^{t^2} \ge 2a^4 \Leftrightarrow a^{t^2} \ge a^4. \qquad (2)$$

- Với $a > 1$

$$(2) \Leftrightarrow t^2 \ge 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \ge 2 \\ t \le -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_a x \ge 2 \\ \log_a x \le -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge a^2 \\ x \le a^{-2} \end{array}\right.$$

- Với $0 < a < 1$

$$(2) \Leftrightarrow t^2 \le 4 \Leftrightarrow -2 \le t \le 2 \Leftrightarrow -2 \le \log_a x \le 2 \Leftrightarrow a^{-2} \le t \le a^2$$

Vậy :

- Với $a > 1$, bất phương trình có nghiệm $(0, a^{-2}] \cup [a^2, +\infty)$.
- Với $0 < a < 1$, bất phương trình có nghiệm $[a^{-2}, a^2]$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các bất phương trình:

a. $\log_2(5^x + 2) + 2\log_{5^x+2} 2 - 3 > 0$. b. $\log_3(4^x + 1) + \log_{4^x+1} 3 - 3 > \dfrac{5}{2}$.

Bài tập 2: Giải các bất phương trình:

a. $3^{\log_3^2 x} - 18x^{\log_3 \frac{1}{x}} + 3 > 0$. **b.** $2^{\log_{\frac{1}{2}}^2 x} + x^{\log_{\frac{1}{2}} x} > \dfrac{5}{2}$.

c. $x^{\log_2 x} + x^{5\log_x 2 - \log_2 x} - 18 < 0$. d. $\sqrt{2 - |\log_2 x|} > \log_2 x$.

Bài tập 3: Giải và biện luận bất phương trình:

a. $\dfrac{1+\log_a^2 x}{1+\log_a x} > 1.$ b. $\dfrac{1}{5-\log_a x} + \dfrac{2}{1+\log_a x} < 1.$

Bài tập 4: Cho bất phương trình:

$$\log_2^2 x - 2(m+1)\log_2 x + m^2 + 2m \le 0.$$

b. Giải bất phương trình với m = 1.

c. Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in [1, 2]$.

Bài tập 5: Giải và biện luận bất phương trình:

$$\frac{\log_a^2 x - 3\log_a x - 2}{\log_a x - 1} \ge 2(\log_a x + 1).$$

Bài tập 6: Giải và biện luận bất phương trình:

$$\log_3 x + \log_x 3 + 2\cos\alpha \le 0.$$

Bài toán 4: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 2.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ý tưởng của phương pháp này cũng giống như phương trình logarit.

Ví dụ 1: Giải bất phương trình:

$$\log_3^2 x - \log_2(8x).\log_3 x + \log_2 x^3 < 0. \qquad (1)$$

Giải

Điều kiện x > 0.

Biến đổi bất phương trình về dạng: $\log_3^2 x - (3+\log_2 x).\log_3 x + 3\log_2 x < 0.$

Đặt $t = \log_3 x$, khi đó bất phương trình có dạng:

$$f(t) = t^2 - (3+\log_2 x).t + 3\log_2 x < 0 \qquad (2)$$

ta có: $\Delta = (3+\log_2 x)^2 - 12\log_2 x = (3-\log_2 x)^2$,

do đó f(t) = 0 có nghiệm: $\left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = \log_2 x \end{array}\right.$.

Do đó, (2) tương đương với:

$$(t-3)(t-\log_2 x) < 0 \Leftrightarrow (\log_3 x - 3)(\log_3 x - \log_2 x) < 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_3 x - 3 > 0 \\ \log_3 x - \log_2 x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_3 x - 3 < 0 \\ \log_3 x - \log_2 x > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_3 x > 3 \\ \log_3 x < \log_2 x \end{cases} \\ \begin{cases} \log_3 x < 3 \\ \log_3 x > \log_2 x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 27 \\ x > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 27 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 27 \\ 0 < x < 1 \end{array}\right..$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm là tập $(0, 1) \cup (27, +\infty)$.

Ví dụ 2: Giải bất phương trình:

$$\log_2^2 x - (x + 1)\log_2 x + 2x - 2 > 0. \quad (1)$$

Giải

Điều kiện $x > 0$.

Đặt $t = \log_2 x$, khi đó bất phương trình có dạng:

$$f(t) = t^2 - (x + 1)t + + 2x - 2 > 0 \quad (2)$$

ta có $\Delta' = (x + 1)^2 - 4(2x - 2) = (x - 3)^2$, do đó $f(t) = 0$ có nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} t = x - 1 \\ t = 2 \end{array}\right..$$

Vậy:

$$(2) \Leftrightarrow (t - x + 1)(t - 2) > 0 \Leftrightarrow (\log_2 x - x + 1)(\log_2 x - 2) > 0. \quad (3)$$

Trước hết ta đi giải phương trình $\log_2 x - x + 1 = 0$ để xác định dấu của nó

Đặt $t - \log_2 x \Rightarrow x = 2^t$, khi đó phương trình có dạng:

$$t - 2^t + 1 = 0 \Leftrightarrow 2^t = t + 1 \overset{\text{Bernoulli}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 0 \\ \log_2 x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right..$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 1$ và $x = 2$.

Khi đó:

$$(3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \log_2 x - x + 1 > 0 \\ \log_2 x > 2 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \log_2 x - x + 1 < 0 \\ \log_2 x < 2 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 1 < x < 2 \\ x > 1 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x < 1 \\ x > 2 \end{array}\right. \\ x < 1 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < x < 2 \\ x < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow 1 \neq x < 2.$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x \in (0, 2) \backslash \{1\}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các bất phương trình:

a. $\log_2^2 x - \log_3(9x).\log_2 x + \log_3 x^2 > 0$.

b. $\log_3^2 x + (x - 10)\log_3 x - 9(x - 1) < 0$.

Bài tập 2: Giải bất phương trình:

$$\log_2^2 x + (x-2)\log_3 x - x + 1 > 0.$$

Bài tập 3: Giải bất phương trình:

$$2\log_3^2 x - (x+1)\log_3 x + x - 1 < 0.$$

Bài tập 4: Giải bất phương trình:

$$\log_3^2 x - \log_2(8x).\log_3 x + \log_2 x^3 < 0.$$

Bài toán 5: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 3.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ý tưởng của phương pháp này cũng giống như phương trình logarit.

Ví dụ 1: Giải bất phương trình:

$$\log_3 x.\log_2 x < \log_3 x^2 + \log_2 \frac{x}{4}.$$

Giải

Điều kiện $x > 0$. (*)

Viết lại bất phương trình dưới dạng: $\log_3 x.\log_2 x - 2\log_3 x - \log_2 x - 2 < 0$.

Đặt : $\begin{cases} u = \log_3 x \\ v = \log_2 x \end{cases}$.

Khi đó, bất phương trình có dạng : $uv - 2u - v - 2 < 0 \Leftrightarrow (u-1)(v-2) < 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u-1>0 \\ v-2<0 \end{cases} \\ \begin{cases} u-1<0 \\ v-2>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_3 x > 1 \\ \log_2 x < 2 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_3 x < 1 \\ \log_2 x > 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 3 \\ x < 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 3 \\ x > 4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 3 < x < 4, \text{ thoả mãn } (*).$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $3 < x < 4$.

Ví dụ 2: Cho bất phương trình:

$$\log_2^2 x - m\log_2 x < \log_2 x.\log_3 x - m\log_3 x. \quad (1)$$

a. Giải bất phương trình với $m = -2$.

b. Tìm m để nghiệm của bất phương trình chứa khoảng $(1, 4)$.

Giải

Điều kiện $x > 0$. (*)

Đặt :

$$\begin{cases} u = \log_2 x \\ v = \log_3 x \end{cases}.$$

Khi đó, bất phương trình có dạng :

$$u^2 - mu < uv - mv \Leftrightarrow (u - v)(u - m) < 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u - v > 0 \\ u - m < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} u - v < 0 \\ u - m > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_2 x > \log_3 x \\ \log_2 x < m \end{cases} \\ \begin{cases} \log_2 x < \log_3 x \\ \log_2 x > m \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < x < 2^m \\ \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x > 2^m \end{cases} \end{array}\right. . \qquad (I)$$

a. Với m = – 2 (Bạn đọc tự giải), ta được nghiệm $\frac{1}{4} < x < 1$.

b. Để nghiệm của bất phương trình chứa khoảng (1, 4), điều kiện là:

$2^m \geq 4 \Leftrightarrow m \geq 2$.

Vậy, với $m \geq 2$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải bất phương trình:

$$\log_3 x.\log_2 x > \log_2 x^2 + \log_3 \frac{x}{9}.$$

Bài tập 2: Giải các bất phương trình:

a. $\log_3 x.\log_2 x < \log_3 x^2 + \log_2 \frac{x}{4}$.

b. $\log_x 2.\log_x 5 - \log_x 2 + \log_x 5 > \log_x^2 5$.

Bài tập 3: Tìm m để nghiệm của bất phương trình sau chứa khoảng (2, + ∞) :

$$\log_3 x.\log_2 x + 2m > \log_2 x^m + \log_3 x^2.$$

Bài tập 4: Cho bất phương trình:

$$\log_3^2 x - m\log_3 x < \log_2 x.\log_3 x - m\log_2 x.$$

a. Giải bất phương trình với m = 1.

b. Tìm m để nghiệm của bất phương trình chứa khoảng (1, 9).

Bài toán 6: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 4.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ý tưởng của phương pháp này cũng giống như phương trình logarit.

Ví dụ 1: Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm:

$$\left|\log_2\left(\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg}x\right)\right| - \left|\log_2\left(\frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg}x\right)\right| < m.$$

Giải

Đặt: $\begin{cases} u = \log_2(\dfrac{1}{\cos x} - tgx) \\ v = \log_2(\dfrac{1}{\cos x} + tgx) \end{cases}$,

suy ra :

$$u + v = \log_2(\frac{1}{\cos x} - tgx) + \log_2(\frac{1}{\cos x} + tgx)$$

$$= \log_2(\frac{1}{\cos^2 x} - tg^2x) = \log_2 1 = 0.$$

Khi đó, bất phương trình được chuyển thành hệ:

$$\begin{cases} |u| - |v| < m \\ u + v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 0 \\ |u| - |-u| < m \end{cases} \Rightarrow m > 0.$$

Vậy, với m > 0, bất phương trình có nghiệm.

Ví dụ 2: Cho bất phương trình: $\sqrt{\log_2 x^3 - m} \ge \log_2 x$. (1)

a. Giải bất phương trình với m = 2.

b. Tìm m để nghiệm của bất phương trình chứa đoạn [1, 2].

c. Tìm m để nghiệm của bất phương trình là đoạn [2, 8].

Giải

Điều kiện x > 0. (*)

Cách 1: Đặt:

$$\begin{cases} u = \sqrt{\log_2 x^3 - m} = \sqrt{3\log_2 x - m} \\ v = \log_2 x \end{cases}$$, điều kiện $u \ge 0$.

Khi đó, bất phương trình được chuyển thành hệ:

$$\begin{cases} u \ge v \\ u^2 - 3v = -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u \ge 3v \\ 3v = u^2 + m \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3u \ge u^2 + m \Leftrightarrow u^2 - 3u + m \le 0. \quad (2)$$

Khi đó với m = 2, ta được:

$$(2) \Leftrightarrow u^2 - 3u + 2 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le u \le 2 \Leftrightarrow 2 \le x \le 4.$$

Vậy, với m = 2, bất phương trình có nghiệm $2 \le x \le 4$.

Cách 2: Đặt $t = \log_2 x$, khi đó bất phương trình có dạng :

$$\sqrt{3t - m} \ge t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t \le 0 \\ 3t - m \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} t > 0 \\ 3t - m \ge t^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t \le 0 \\ t \ge \dfrac{m}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} t > 0 \\ f(t) = t^2 - 3t + m \le 0 \quad (3) \end{cases} \end{array}\right. . \quad (I)$$

a. Với m = 2, hệ (I) có dạng:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} t \le 0 \\ t \ge 2/3 \end{cases} \\ \begin{cases} t > 0 \\ t^2 - 3t + 2 \le 0 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ 1 \le t \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le \log_2 x \le 2 \Leftrightarrow 2 \le x \le 4.$$

b. Với $1 \le x \le 2$ ta được:

$$\log_2 1 \le \log_2 x \le \log_2 2 \Leftrightarrow 0 \le t \le 1.$$

Để nghiệm của bất phương trình chứa đoạn [1, 2], điều kiện là nghiệm của (I) chứa đoạn [0, 1] $\Rightarrow$ nghiệm của (I) chứa điểm 0 $\Leftrightarrow m \le 0$.

Thử lại với $m \le 0$, ta được:

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{m}{3} \le t \le 0 \\ \begin{cases} t > 0 \\ \dfrac{3 - \sqrt{9-4m}}{2} \le t \le \dfrac{3 + \sqrt{9-4m}}{2} \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{m}{3} \le t \le \frac{3 + \sqrt{9-4m}}{2}.$$

. Nhận thấy $[0, 1] \subset [\dfrac{m}{3}, \dfrac{3+\sqrt{9-4m}}{2}]$, do đó $m \le 0$ là điều kiện cần tìm.

c. Với $2 \le x \le 8$ ta được:

$$\log_2 2 \le \log_2 x \le \log_2 8 \Leftrightarrow 1 \le t \le 3.$$

Để nghiệm của bất phương trình là đoạn [2, 8], điều kiện là nghiệm của (I) là đoạn [1, 3]

$\Leftrightarrow$ f(t) = 0 có hai nghiệm phân biệt 1 và 3

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 = 0 \\ m = 0 \end{cases}, \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, không tồn tại m thoả mãn điều kiện đầu bài.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho bất phương trình:

$$\left|\log_2\left(\frac{1}{\sin x} - \operatorname{cotg} x\right)\right| - \left|\log_2\left(\frac{1}{\sin x} + \operatorname{cotg} x\right)\right| < m.$$

a. Giải bất phương trình với m = 1.

b. Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm.

Bài tập 2: Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm:

$$\left|\log_2\left(\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x\right)\right| - \left|\log_2\left(\frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x\right)\right| < m.$$

Bài tập 3: Cho bất phương trình: $\sqrt{\log_3 x^2 - m} \geq \log_3 x$.

a. Giải bất phương trình với m = 1.

b. Tìm m để nghiệm của bất phương trình chứa đoạn [1, 3].

Bài toán 7: Sử dụng tính chất đơn điệu của hàm số.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ý tưởng của phương pháp này cũng giống như phương trình logarit.

Ví dụ 1: Cho bất phương trình:

$$x^2 - (m + 3)x + 3m < (m - x)\log_2 x. \qquad (1)$$

a. Giải bất phương trình khi m = 2.

b. Giải và biện luận bất phương trình.

Giải

Điều kiện $x > 0$.

Biến đổi bất phương trình (1) về dạng :

$$x^2 - (m + 3 - \log_2 x)x + 3m - m\log_2 x < 0. \qquad (2)$$

Coi (2) là bất phương trình bậc 2 theo ẩn x, ta có :

$$\Delta = (m + 3 - \log_2 x)^2 - 4(3m - m\log_2 x) = (\log_2 x - m + 3)^2$$

Do đó:

$$(2) \Leftrightarrow (x - m)(x - 3 + \log_2 x) < 0. \qquad (3)$$

Xét $x - 3 + \log_2 x > 0 \Leftrightarrow \log_2 x > 3 - x$. (4)

- Hàm số $y = \log_2 x$ là hàm đồng biến và hàm số $y = 3 - x$ là hàm nghịch biến.
- Với $x > 2$, ta có :

$$\begin{cases} VT > 1 \\ VP < 1 \end{cases} \Rightarrow x > 2 \text{ là nghiệm của bất phương trình (4).}$$

- Với $0 < x \leq 2$, ta có :

$$\begin{cases} VT < 1 \\ VP > 1 \end{cases} \Rightarrow 0 < x \leq 2 \text{ không là nghiệm của bất phương trình (4).}$$

Do đó (3) được chuyển thành:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > m \\ x - 3 + \log_2 x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < m \\ x - 3 + \log_2 x > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > m \\ x < 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x < m \\ x > 2 \end{cases} \end{array}\right. . \qquad \text{(I)}$$

a. Với m = 2

(I) vô nghiệm ⇔ (1) vô nghiệm.

b. Biện luận

- Với $m \le 0$, bất phương trình có nghiệm $0 < x < 2$.
- Với $0 < m < 2$, bất phương trình có nghiệm $m < x < 2$.
- Với $m = 2$, bất phương trình vô nghiệm.
- Với $m > 2$, bất phương trình có nghiệm $2 < x < m$.

Ví dụ 2: Cho bất phương trình:

$$2^{(m+1)x+4} - 2^{m^2-m-2} > \lg(m^2 - m - 2) - \lg[(m+1)x+4]. \quad (1)$$

a. Giải bất phương trình với $m = 3$.

b. Tìm m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x \in [0, 1]$.

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} m^2 - m - 2 > 0 \\ (m+1)x + 4 > 0 \end{cases}. \quad (*)$$

Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$2^{(m+1)x+4} + \lg[(m+1)x+4] > 2^{m^2-m-2} + \lg(m^2 - m - 2). \quad (2)$$

Xét hàm số $f(x) = 2^x + \lg x$ đồng biến với $x > 0$.

Vậy, bất phương trình (2) được viết dưới dạng:

$$f[(m+1)x+4] > f(m^2 - m - 2) \Leftrightarrow (m+1)x + 3 > m^2 - m - 2$$

$$\Leftrightarrow g(x) = (m+1)x - m^2 + m + 6 > 0. \quad (3)$$

a. Với $m = 3$, ta được:

$$4x > 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

Vậy, với $m = 3$ bất phương trình có nghiệm $x > 0$.

b. Vậy, bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x \in [0, 1]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 > 0 \\ g(x) = (m+1)x - m^2 + m + 6 > 0 \ \forall x \in [0,1] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \vee m < -1 \\ g(0) > 0 \\ g(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -1 \end{array}\right. \\ 1 - \sqrt{8} < m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 < m < 3 \\ 1 - \sqrt{8} < m < -1 \end{array}\right..$$

Vậy, với $m \in (1 - \sqrt{8}, -1) \cup (2, 3)$ thì (1) nghiệm đúng với mọi $x \in [0, 1]$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các bất phương trình:

a. $x + \log_3 x < 4$.

b. $x + \log_2 x > 1$.

c. $x^2 + 2x + \log_2 x > 3$.

d. $2^x + \log_2 x > 2$.

Bài tập 2: Giải các bất phương trình:

a. $\log_2 x + \log_3(x + 1) < 2$.

b. $\log_2 \sqrt{x+1} + \log_3 \sqrt{x+9} > 1$.

Bài tập 3: Giải bất phương trình:

$$x^2 + (\log_2 x - 2)x + \log_2 x - 3 > 0.$$

Bài tập 4: Giải bất phương trình:

$$\log_3 \frac{\sqrt{x^2 - x - 12}}{7 - x} + x \le 7 - \sqrt{x^2 - x - 12}.$$

Bài tập 5: Cho bất phương trình:

$$x^2 - (m + 4)x + 4m < (m - x)\log_2 x.$$

a. Giải bất phương trình khi $m = 2$.

b. Giải và biện luận bất phương trình.

Bài toán 8: Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ý tưởng của phương pháp này cũng giống như phương trình logarit.

Ví dụ 1: Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\log_{m^2+1}(2 - \sqrt{x^2 + 1}) \ge (m - 1)^2. \qquad (1)$$

Giải

Điều kiện cần: Giả sử (1) có nghiệm là $x = x_0$ suy ra $-x_0$ cũng là nghiệm của bất phương trình (1). Vậy (1) có nghiệm duy nhất khi

$$x_0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0.$$

Thay $x_0 = 0$ vào (1), ta được:

$$\log_{m^2+1} 1 \ge (m - 1)^2 \Leftrightarrow (m - 1)^2 \le 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Đó chính là điều kiện cần để phương trình có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ: Giả sử $m = 1$, khi đó (1) có dạng:

$$\log_2(2 - \sqrt{x^2 + 1}) \ge 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{x^2 + 1} \ge 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} \le 1 \Leftrightarrow x^2 + 1 \le 1$$

$\Leftrightarrow x^2 \le 0 \Leftrightarrow x = 0$ là nghiệm duy nhất.

Vậy, với $m = 1$ bất phương trình có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 2: Tìm điều kiện của m để bất phương trình

$$\lg\sqrt{(2+x)(4-x)} \le \lg(x^2-2x+m) \qquad (1)$$

nghiệm đúng với mọi $x \in (-2,\ 4)$.

Giải

Biến đổi bất phương trình tương đương với:

$$\sqrt{(2+x)(4-x)} \le x^2-2x+m. \qquad (2)$$

Để (1) nghiệm đúng với mọi $x\in(-2,\ 4)$

$\Leftrightarrow$ (2) nghiệm đúng với mọi $x\in(-2,\ 4)$.

Điều kiện cần: Giả sử (1) có nghiệm $\forall x \in (-2, 4) \Rightarrow x = 1$ là nghiệm của (1), khi đó:

$$3 \le m - 1 \Leftrightarrow m \ge 4.$$

Đó là điều kiện cần để bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x\in(-2,\ 4)$.

Điều kiện đủ: Giả sử $m \ge 4$, khi đó:

- Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho vế trái, ta được:

$$VT = \sqrt{(2+x)(4-x)} \le \frac{(2+x)+(4-x)}{2} = 3.$$

- Biến đổi vế phải về dạng:

$$VP = x^2-2x+m = (x-1)^2+m-1 \ge 3$$

- Suy ra:

$$\sqrt{(2+x)(4-x)} \le x^2-2x+m.$$

Vậy, với $m \ge 4$ bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x\in(-2,\ 4)$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm duy nhất:

a. $\log_m(x^2+2) \le \log_2 m$.

b. $\log_{|x|+2}(|x|+1) + \log_2(1+m^2) \le 0$.

c. $\log_{m^2+1}(2-\sqrt{x^2+1}) \ge (m-1)^2$.

Bài tập 2: Tìm a, b, c để mọi $x\in[-1, 1]$ luôn có:

$$\log_3|4x^3+ax^2+bx+c| \le 0.$$

Bài toán 9: Sử dụng phương pháp đánh giá.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ý tưởng của phương pháp này cũng giống như phương trình logarit.

Ví dụ 1: Giải bất phương trình:

$$\log_2(x^2+1) + 2\log_{x^2+1}(2x^2+1) + 4\log_{2x^2+1}2 \ge 6.$$

Giải

Điều kiện $x \ne 0$.

Nhận xét rằng:

$$\log_2(x^2+1),\ \log_{x^2+1}(2x^2+1),\ \log_{2x^2+1}2 > 0$$

do đó sử dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\text{VT} = \log_2(x^2+1) + 2\log_{x^2+1}(2x^2+1) + 4\log_{2x^2+1}2$$

$$\ge 3\sqrt[3]{8\log_2(x^2+1).\log_{x^2+1}(2x^2+1).\log_{2x^2+1}2} = 6 = \text{VP}.$$

Vậy, bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \ne 0$.

Ví dụ 2: Giải bất phương trình:

$$\frac{1}{\log_{1/3}\sqrt{2x^2-3x+1}} > \frac{1}{\log_{1/3}(x+1)}. \qquad (1)$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} 0 < 2x^2-3x+1 \ne 1 \\ 0 < x+1 \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty) \backslash \{0, \frac{3}{2}\}.$$

Ta có:

$$A = \log_{\frac{1}{3}}\sqrt{2x^2-3x+1} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-3x+1} < 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-3x+1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{3}{2}$$

$$B = \log_{\frac{1}{3}}(x+1) > 0 \Leftrightarrow x+1 < 1 \Leftrightarrow x < 0.$$

Từ đó, ta có bảng xét dấu sau (trên miền xác định):

x	$-\infty$		-1		0		$1/2$		1		$3/2$		$+\infty$
A	▨	▨	▨	−	‖	+	▨	▨	▨	+	‖	−	
B	▨	▨	▨	+	‖	−	▨	▨	▨	−	‖	−	

- Với $-1 < x < 0$, thì VT < 0, VP > 0 do đó (1) vô nghiệm.
- Với $0 < x < \frac{1}{2}$, thì VT > 0, VP < 0 do đó (1) nghiệm đúng.
- Với $1 < x < \frac{3}{2}$, thì VT > 0, VP < 0 do đó (1) nghiệm đúng.
- Với $x > \frac{3}{2}$, VT < 0, VP < 0, bất phương trình (1) tương đương với:

$$\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{2x^2-3x+1} < \log_{\frac{1}{3}}(x+1) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-3x+1} > x+1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1>0 \\ 2x^2-3x+1>(x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x^2-5x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x<0 \\ x>5 \end{array}\right.$$

Kết hợp với trường hợp đang xét, ta được $x > 5$.

Vậy, bất phương trình có nghiệm $(0, \frac{1}{2}) \cup (1, \frac{3}{2}) \cup (5, +\infty)$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải bất phương trình:

$$\left|\log_{\frac{1}{3}}(1+\cos 2x)\right| + \left|\log_3 2 - \log_{\frac{1}{3}}(\sin^2 x)\right| < 1.$$

Bài tập 2: Giải bất phương trình:

$$\log_2(\sqrt{x-2}+4) \le \log_3\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}+8\right).$$

Bài tập 3: Giải bất phương trình:

$$\log_3(x^2+2) + \log_{x^2+2}(x^2+1) + \log_{x^2+1}3 \ge 3.$$

Bài tập 4: Giải bất phương trình:

$$\log_{x+1}(2x) \le 1 - \log_2 x.$$

CHỦ ĐỀ 3

HỆ PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Định nghĩa: Hệ phương trình logarit là hệ phương trình chứa ẩn ở dưới dấu logarit.

II. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

Bài toán 1: Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Trong phần này chúng ta sử dụng phương pháp biến đổi tương đương đã biết để giải các hệ phương trình logarit.

Ví dụ 1: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ \log_2 x + \log_2 y = m \end{cases}.$$

a. Giải hệ phương trình với m = 2.

b. Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất.

Giải

Điều kiện x, y > 0.

Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ \log_2(x.y) = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x.y = 2^m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 17 \\ x.y = 2^m \end{cases}$$

$$\overset{x,y>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y = \sqrt{17 + 2^{m+1}} \\ x.y = 2^m \end{cases}.$$

Khi đó x, y là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - t\sqrt{17 + 2^{m+1}} + 2^m = 0. \qquad (1)$$

a. Với m = 2, ta được:

$$t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \ \& \ y = 4 \\ x = 4 \ \& \ y = 1 \end{array}\right..$$

Vậy, với m = 2 hệ phương trình có hai cặp nghiệm (1, 4) và (4, 1).

b. Hệ có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm kép dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(1)} = 0 \\ -\dfrac{b}{2a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17 + 2^{m+1} - 4.2^{m} = 0 \\ \dfrac{\sqrt{17 + 2^{m+1}}}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2^{m+1} = 17$$

$\Leftrightarrow m + 1 = \log_2 17 \Leftrightarrow m = \log_2 \dfrac{17}{2}$.

Vậy, với $m = \log_2 \dfrac{17}{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 2: Giải và biện luận theo k hệ phương trình:

$$\begin{cases} \log_x (3x + ky) = 2 \\ \log_y (3y + kx) = 2 \end{cases}.$$

Giải

Điều kiện $0 < x, y \neq 1$.

Biến đổi hệ phương trình về dạng:

$$\begin{cases} 3x + ky = x^2 \quad (*) \\ 3y + kx = y^2 \end{cases}$$

Trừ hai phương trình cho nhau, ta được:

$$(3 - k)x - (3 - k)y = x^2 - y^2 \Leftrightarrow (x - y)[(x + y + k - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ y = 3 - k - x \end{array} \right.$$

Xét từng trường hợp:

- Với $x = y$, thay vào (*), ta được:

  $$(3 + k)x = x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \quad (l) \\ x = 3 + k \end{array} \right. .$$

  Vì điều kiện $0 < x \neq 1$, ta cần có $0 < 3 + k \neq 1 \Leftrightarrow -3 < k \neq -2$.

  Vậy, ta được nghiệm là $x = y = 3 + k$.

- Với $y = 3 - k - x$, thay vào (*), ta được:

$$3x + k(3 - k - x) = x^2 \Leftrightarrow f(x) = x^2 + (k - 3)x + (k - 3)k = 0, \qquad (1)$$

có $\Delta' = -3(k - 3)(k + 1)$.

- Với $k > 3 \vee k < -1$ thì $\Delta' < 0 \Leftrightarrow$ (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ hệ vô nghiệm.
- Với $k = 3$ thì $\Delta' = 0 \Leftrightarrow$ (1) có nghiệm $x = 0$ không thoả mãn điều kiện.
- Với $k = -1$ thì $\Delta' = 0 \Leftrightarrow$ (1) có nghiệm $x = 2$, suy ra $y = 2$.
- Với $-1 < k < 3$ thì $\Delta' > 0 \Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1 + x_2 = 3 - k$.

  Với $x = x_1$ thì $y = 3 - k - x_1 = x_2$, còn nếu $x = x_2$ thì $y = 3 - k - x_2 = x_1$.

Do đó, với điều kiện $0 < x, y \neq 1$, ta phải có:

$$0 < x_1, x_2 \neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} S > 0 \\ P > 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - k > 0 \\ (k-3)k > 0 \\ k^2 - 2k - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < 3 \\ \left[\begin{array}{l} k > 3 \\ k < 0 \end{array}\right. \\ k \neq 1 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 1 - \sqrt{3} \neq k < 0.$

Kết hợp với trường hợp đang xét, ta được:

$$\begin{cases} -1 < k < 0 \\ k \neq 1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Kết luận:

- Với $k \leq -3$ hoặc $k = -2$ hệ vô nghiệm.
- Với $k \in (-3, -1]\backslash\{-2\} \vee k = 1 - \sqrt{3} \vee k \geq 0$ hệ có nghiệm $x = y = 3 + k$.
- Với $k \in (-1, 0)\backslash\{1 - \sqrt{3}\}$ hệ có ba nghiệm là:

$$\begin{cases} x = 3 + k \\ y = 3 + k \end{cases}; \begin{cases} x = x_1 \\ y = x_2 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x = x_2 \\ y = x_1 \end{cases}$$, trong đó x_1, x_2 là nghiệm của (1).

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4 \\ \log_4 x - \log_4 y = 1 \end{cases}$.

b. $\begin{cases} 4^{\sqrt{x}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-y} \\ 3^{\log_9 x} = \dfrac{y}{3} \end{cases}$.

c. $\begin{cases} (\sqrt{x+1} - 1)3^y = \dfrac{3\sqrt{4-x}}{x} \\ y + \log_3 x = 1 \end{cases}$.

d. $\begin{cases} x\log_2 3 + \log_2 y = y + \log_2 \dfrac{3x}{2} \\ x\log_3 12 + \log_3 x = y + \log_3 \dfrac{2y}{3} \end{cases}$.

Bài tập 2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \log_4(x^2 + y^2) - \log_4(2x) + 1 = \log_4(x + 3y) \\ \log_4(xy + 1) - \log_4(4y^2 + 2y - 2x + 4) = \log_4 \dfrac{x}{y} - 1 \end{cases}.$$

Bài tập 3: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 = y^4 \\ \log_2 \dfrac{x}{y} = m\log_y x \end{cases}$.

a. Giải hệ phương trình với $m = 1$.

b. Tìm m để hệ có cặp nghiệm (x, y) thoả mãn $x > 1$ và $y < 4$.

Bài tập 4: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\log_3 x^2 - \log_3 y = 0 \\ |x|^3 + y^2 - my = 0 \end{cases}.$$

a. Giải hệ phương trình với m = 2.

b. Tìm m để hệ có nghiệm.

Bài toán 2: Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ.

Ví dụ 1: Giải và biện luận hệ sau với $a, b > 0$:

$$\begin{cases} \log_x(ax + by) + \log_y(ay + bx) = 4 \\ \log_x(ax + by).\log_y(ay + bx) = 4 \end{cases}.$$

Giải

Đặt:

$$\begin{cases} u = \log_x(ax + by) \\ v = \log_y(ay + bx) \end{cases}.$$

Khi đó, hệ có dạng:

$$\begin{cases} u + v = 4 \\ uu = 4 \end{cases} \Leftrightarrow u = v = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_x(ax + by) = 2 \\ \log_y(ay + bx) = 2 \end{cases}. \qquad \text{(II)}$$

Điều kiện $0 < x, y \neq 1$.

Từ đó (II) có dạng :

$$\begin{cases} ax + by = x^2 \\ ay + bx = y^2 \end{cases} \Rightarrow (a - b)(x - y) = x^2 - y^2 \Leftrightarrow (x - y)(x + y - a + b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ y = a - b - x \end{array}\right..$$

- Với $x = y$, suy ra:

$$\begin{cases} x = y \\ ax + bx = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \ (l) \\ x = a + b \end{array}\right. \end{cases}.$$

Vì $0 < x, y \neq 1$, phải có $a + b \neq 1$, khi đó hệ có nghiệm là: $x = y = a + b$.

- Với $y = a - b - x$, suy ra:

$$\begin{cases} y = a - b - x \\ ax + b(-2 - x) = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = a - b - x \\ x^2 - (a - b)x - b(a - b) = 0 \ (*) \end{cases}$$

Vì $0 < x, y \neq 1$, phải có

$$\begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ 0 < a - b - x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ a - b - 1 \neq x < a - b \end{cases} \Rightarrow a - b > 0,$$

Khi đó phương trình (*) nếu có nghiệm thì hai nghiệm đều âm (không thoả mãn). Vậy hệ vô nghiệm.

Vậy, với $a + b \neq 1$, hệ có nghiệm là: $x = y = a + b$.

Ví dụ 2: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \lg^2 x + \lg^2 y = 1 \\ \lg \dfrac{x}{y} = m \end{cases}.$$

a. Giải hệ phương trình với $m = 1$.

b. Xác định các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Giải

Điều kiện $x, y > 0$.

Đặt:

$$\begin{cases} u = \lg x \\ v = \lg y \end{cases}$$

Khi đó hệ (I) được biến đổi về dạng:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 1 \\ u - v = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = u - m \\ u^2 + (u - m)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = u - m \\ 2u^2 - 2mu + m^2 - 1 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

a. Với $m = 1$, ta được:

$$\begin{cases} v = u - 1 \\ 2u^2 - 2u = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = u - 1 \\ \left[\begin{array}{l} u = 0 \\ u = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 0 \ \& \ v = -1 \\ u = 1 \ \& \ v = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \ \& \ y = \dfrac{1}{10} \\ x = 10 \ \& \ y = 1 \end{array}\right.$$

Vậy, với $m = 1$ hệ có hai cặp nghiệm $(1, \frac{1}{10})$ và $(10, 1)$.

b. Hệ đã cho có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow m^2 - 2(m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$.

Vậy, với $m = \pm\sqrt{2}$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} 3^{\lg x} = 4^{\lg y} \\ (4x)^{\lg 4} = (3y)^{\lg 3} \end{cases}$.

b. $\begin{cases} 4^{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}} = 32 \\ \log_3(x - y) = 1 - \log_3(x + y) \end{cases}$.

Bài tập 2: Giải hệ phương trình:

a. $\begin{cases} \log_x(3x+5y)+\log_y(3y+5x)=4 \\ \log_x(3x+5y).\log_y(3y+5x)=4 \end{cases}$.

b. $\begin{cases} \log_{1+x}(1-2y+y^2)+\log_{1-y}(1+2x+x^2)=4 \\ \log_{1+x}(1+2y)+\log_{1-y}(1+2x)=2 \end{cases}$.

Bài tập 3: .Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4\lg x - m\lg y = -m-1 \\ (m+6)\lg x + 2\lg y = m+3 \end{cases}.$$

Bài tập 4: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \ln(xy) = \ln^2 x + m \\ \ln(xy) = \ln^2 y + m \end{cases}.$$

a. Giải hệ phương trình với $m = 1$.

b. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm.

Bài tập 5: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + 2\lg y = 3m \\ x - 3\lg y^2 = 1 \end{cases}.$$

a. Giải hệ phương trình với $m = 1$.

b. Tìm m để hệ có cặp nghiệm (x, y) thoả mãn $x \geq 1$.

Bài tập 6: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \log_x(x.\cos\alpha + y.\sin\alpha) + \log_y(y\cos\alpha + x.\sin\alpha) = 4 \\ \log_x(x.\cos\alpha + y.\sin\alpha).\log_y(y\cos\alpha + x.\sin\alpha) = 4 \end{cases}.$$

a. Giải hệ khi $\alpha = 45^0$.

b. Giải và biện luận hệ khi $0 < \alpha < 90^0$.

Bài toán 3: Sử dụng phương pháp hàm số .

Ví dụ 1: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \ln x - \ln y = y - x \\ x^2 + y^2 - 6mx - 2my + 6 = 0 \end{cases}$.

a. Giải hệ phương trình với $m = 1$.

b. Xác định m để hệ có hai cặp nghiệm phân biệt.

Giải

Điều kiện $x, y > 0$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ:

$$\ln x + x = \ln y + y. \qquad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = \ln t + t$ là hàm đồng biến, khi đó (3) tương đương:

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y.$$

Khi đó hệ được chuyển về dạng:

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 - 4mx + 3 = 0 \quad (4) \end{cases}.$$

a. Với m = 1, ta được:

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \overset{x,y>0}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x = y = 1 \\ x = y = 3 \end{array}\right..$$

Vậy, với m = 1 hệ có hai cặp nghiệm (1, 1) và (3, 3).

b. *Đề nghị bạn đọc tự giải.*

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_2(x+1) = y - 1 \\ \log_2 y = x \end{cases}$.

Bài tập 2: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_2 \sqrt{x+3} = 1 + \log_3 y \\ \log_2 \sqrt{y+3} = 1 + \log_3 x \end{cases}$.

Bài tập 3: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \log_3(x - y + 3) = 1 - x + y \\ \log_{2+x^2}(8x^2 - 2y + 2m - 4m^2) = \log_{2+y^2}(4y^2 + 2mx - 2m^2) \end{cases}.$$

a. Giải hệ phương trình với m = 1.

b. Xác định m để hệ có hai cặp nghiệm (x_1, y_1) và (x_2, y_2) thoả mãn

$$(x_1^2 + 3x_2^2) + (3y_1^2 + y_2^2) > 1. \qquad (*)$$

Bài tập 4: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \ln x - \ln y = y - x \\ x^2 - m(x + 2y) + 2 = 0 \end{cases}.$$

a. Giải hệ phương trình với m = 1.

b. Xác định m để hệ có hai cặp nghiệm phân biệt.

Bài toán 4: Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ.

Ví dụ 1: Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} \log_2(x + y) = m \log_2(xy) \\ \log_2(xy) = 6 - xy \end{cases}.$$

Giải

Điều kiện:

$$\begin{cases} x + y > 0 \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x, y > 0.$$

Điều kiện cần: : Nhận xét rằng nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì cũng có nghiệm (y_0, x_0), do đó hệ có nghiệm duy nhất thì $x_0 = y_0$.

Khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases} \log_2(x_0 + x_0) = m \log_2 x_0^2 \\ \log_2 x_0^2 = 6 - x_0^2 \end{cases} \overset{x_0>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \log_2 4 = m \log_2 4 \\ x_0 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Điều kiện đủ: Với m = 1, ta được:

$$\begin{cases} \log_2(x + y) = \log_2(xy) \\ \log_2(xy) = 6 - xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = xy \\ xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 2.$$

Vậy, với m = 1 hệ có nghiệm duy nhất (2, 2).

Ví dụ 2: Tìm a để hệ sau có nghiệm với mọi b:

$$\begin{cases} 2^{b\log_3 x} + b(a+1)\log_2^2 y = a^2 \\ (a-1)\log_3^2 x + \log_2^2 y = 1 \end{cases} \qquad (I)$$

Giải

Điều kiện cần: Hệ có nghiệm với ∀b ⇒ có nghiệm với b = 0, khi đó:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = a^2 \\ (a-1)\log_3^2 x + \log_2^2 y = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \pm 1.$$

Đó chính là điều kiện cần để hệ nghiệm với ∀b.

Điều kiện đủ

- Với a = 1, khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases} 2^{b\log_3 x} + 2b\log_2^2 y = 1 \\ \log_2^2 y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{b\log_3 x} + 2b = 1 \\ \log_2^2 y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{b\log_3 x} = 1 - 2b \\ \log_2^2 y = 1 \end{cases}$$

Nhận xét rằng hệ trên chỉ có nghiệm khi:

$$1 - 2b > 0 \Leftrightarrow b < \frac{1}{2}.$$

Vậy a = 1 không thoả mãn.

- Với a = − 1, khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases} 2^{b\log_3 x} = 1 \\ -2\log_3^2 x + \log_2^2 y = 1 \end{cases}$$

Nhận xét rằng hệ trên luôn nhận $x = 1$ và $y = 2$ làm nghiệm.

Vậy với $a = -1$ hệ có nghiệm với mọi b.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} \lg x.\lg y + \lg^2 x = m(\lg y - 1) \\ \lg x.\lg y + \lg^2 y = m(\lg x - 1) \end{cases}.$$

Bài tập 2: Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\log_3 x^2 - \log_3 y = 0 \\ |x|^3 + y^2 - my = 0 \end{cases}.$$

Bài toán 5: Sử dụng phương pháp đánh giá.

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} e^x - e^y = (\log_2 y - \log_2 x)(xy + 1) & (1) \\ x^2 + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x, y > 0$.

- Giải (1), ta có nhận xét sau :
  - Nếu $x > y \Leftrightarrow \log_2 x > \log_2 y$, khi đó:

    $$\begin{cases} VT_{(1)} > 0 \\ VP_{(1)} < 0 \end{cases} \Rightarrow (1) \text{ vô nghiệm.}$$

  - Nếu $x < y$, tương tự (1) vô nghiệm.
  - Vậy $x = y$ là nghiệm của (1).

Khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vậy, hệ có một cặp nghiệm $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \log_2(x+y) = x+y-1 \\ \log_{x+y+2}(xy+1) = x+y-1 \end{cases}.$$

Giải

Điều kiện

$$\begin{cases} x+y>0 \\ xy+1>0 \\ 0<x+y+2\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y>0 \\ xy+1>0 \end{cases}.$$

Từ phương trình thứ nhất của hệ với việc sử dụng ẩn phụ $t = x + y > 0$, ta được:

$$\log_2 t = t - 1.$$

Đặt $u = \log_2 t \Rightarrow t = 2^u$, khi đó phương trình có dạng:

$$2^u = u + 1 \overset{\text{Bernoulli}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} u=0 \\ u=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 t=0 \\ \log_2 t=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=1 \\ x+y=2 \end{array}\right..$$

- Với $x + y = 1$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ \log_3(xy+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \ \& \ y=1 \\ x=1 \ \& \ y=0 \end{array}\right..$$

- Với $x + y = 2$, tương tự ta nhận thấy vô nghiệm.

Vậy, hệ có hai cặp nghiệm $(0, 1)$ và $(1, 0)$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-y=(\log_2 y-\log_2 x)(2+xy) \\ x^3+y^3=16 \end{cases}.$$

Bài tập 2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \log_2\sqrt{\sin x+3}=\log_3(3\cos y) \\ \log_2\sqrt{\cos y+3}=\log_3(3\sin x) \end{cases}.$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

. Ba cuốn sách giáo khoa chỉnh lí hợp nhất năm 2000 là Đại số 10, Đại số và Giải tích 11, Giải tích 12 của Nhà xuất bản Giáo dục.

. Trần Văn Hạo (chủ biên) - Chuyên đề luyện thi vào Đại học Đại số
- Nhà xuất bản Giáo dục - 2001.

. Trần Thành Minh (chủ biên) - Giải toán Đại số 10
- Nhà xuất bản Giáo dục - 2001.

. Nguyễn Thái Hoè - Dùng ẩn phụ để giải toán - Nhà xuất bản Giáo dục - 2001.

. Đặng Hùng Thắng - Phương trình, bất phương trình và hệ phương trình
- Nhà xuất bản Giáo dục - 1998.

. Nguyễn Văn Mậu - Phương pháp giải phương trình và bất phương trình
- Nhà xuất bản Giáo dục - 2001.

. Phan Đức Chính, Vũ Dương Thuỵ, Tạ Mân, Đào Tam, Lê Thống Nhất. Các bài giảng luyện thi môn toán-Tập 3. Nhà xuất bản giáo dục-1996.

Nguyễn Huy Đoan (Chủ biên). Giải Toán và Ôn tập Giải tích. Nhà xuất bản giáo dục - 2001.

Trần Thành Minh (Chủ biên). Giải toán Khảo sát Hàm số 12. Nhà xuất bản giáo dục - 2001.

). Trần Văn Hạo (Chủ biên). Khảo sát Hàm số. Nhà xuất bản giáo dục - 2001.

1. Tạp chí Toán học tuổi trẻ - Nhà xuất bản Gáo dục.

MỤC LỤC

GIỚI THIỆU CHUNG 3

CHƯƠNG I

DÃY SỐ – CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

Chủ đề 1: ***Dãy số*** 5
- **Bài toán 1:** Mở đầu về dãy số 7
- **Bài toán 2:** Sử dụng phương pháp quy nạp chứng minh dãy số (u_n) thoả mãn tính chất K 9
- **Bài toán 3:** Xác định công thức của dãy số (u_n) 11
- **Bài toán 4:** Xét tính đơn điệu của một dãy số (u_n) 14
- **Bài toán 5:** Xét tính bị chặn của một dãy số (u_n) 17

Chủ đề 2: ***Giới hạn của dãy số*** 20
- **Bài toán 1:** Sử dụng định nghĩa chứng minh rằng $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ 21
- **Bài toán 2:** Chứng minh một dãy số có giới hạn 23
- **Bài toán 3:** Tính giới hạn của dãy số bằng các định lí về giới hạn 25

Chủ đề 3: ***Cấp số cộng*** 29
- **Bài toán 1:** Chứng minh tính chất của một cấp số cộng 29
- **Bài toán 2:** Chứng minh ba số lập thành một cấp số cộng 31
- **Bài toán 3:** Tìm điều kiện của tham số để ba số lập thành một cấp số cộng 32
- **Bài toán 4:** Tìm các phần tử của một cấp số cộng (u_n) 36
- **Bài toán 5:** Tính tổng 38

Chủ đề 4: ***Cấp số nhân*** 39
- **Bài toán 1:** Chứng minh tính chất của một cấp số nhân 39
- **Bài toán 2:** Chứng minh ba số lập thành một cấp số nhân 40
- **Bài toán 3:** Tìm điều kiện của tham số để ba số lập thành một cấp số nhân 41
- **Bài toán 4:** Tìm các phần tử của một cấp số nhân (u_n) 44
- **Bài toán 5:** Tính tổng 45

CHƯƠNG II

GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

Chủ đề 1: ***Định nghĩa và các định lí về giới hạn của hàm số*** 48
- **Bài toán 1:** Sử dụng định nghĩa chứng minh rằng $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ 50

Bài toán 2: Sử dụng định nghĩa chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$ 51
Bài toán 3: Sử dụng định nghĩa chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ 52
Bài toán 4: Chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ không tồn tại 52
Bài toán 5: Giới hạn của hàm số kép 53
Bài toán 6: Sử dụng nguyên lí kẹp giữa tìm giới hạn của hàm số 55
Bài toán 7: Dùng các định lí về giới hạn và giới hạn cơ bản để tìm giới hạn 56

Chủ đề 2: ***Các dạng vô định*** 58
Bài toán 1: Tính giới hạn dạng $\frac{0}{0}$ 58
Bài toán 2: Tính giới hạn dạng $\frac{\infty}{\infty}$ 63
Bài toán 3: Giới hạn dạng $\infty - \infty$ 65
Bài toán 4: Giới hạn của hàm số lượng giác 66
Bài toán 5: Giới hạn dạng 1^{∞}, $0.\infty$, ∞^0 69

CHƯƠNG III
HÀM SỐ LIÊN TỤC

Chủ đề 1: ***Hàm số liên tục*** 73
Bài toán 1: Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm – Dạng I 75
Bài toán 2: Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm – Dạng II 76
Bài toán 3: Xét tính liên tục của hàm số trên một khoảng 78

Chủ đề 2: ***Tính chất của hàm số liên tục*** 80
Bài toán 1: Sử dụng tính liên tục của hàm số chứng minh phương trình có nghiệm 80
Bài toán 2: Sử dụng tính liên tục của hàm số xét dấu hàm số 86

CHƯƠNG IV
HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

Chủ đề 1: ***Luỹ thừa – Hàm số mũ*** 88
Bài toán 1: Các phép toán về luỹ thừa 89
Bài toán 2: So sánh các số có dạng luỹ thừa 92
Bài toán 3: Tìm tập xác định của hàm số mũ 94
Bài toán 4: Tìm giới hạn của hàm số mũ 96
Bài toán 5: Xét tính liên tục của hàm số mũ tại điểm x_0 97

Chủ đề 2: *Logarit – Hàm số logarit* 99
Bài toán 1: Các phép toán về logarit 100
Bài toán 2: Sử dụng công thức đổi cơ số 103
Bài toán 3: So sánh các số có dạng logarit 105
Bài toán 4: Tìm tập xác định của hàm số có chứa logarit 107
Bài toán 5: Tìm giới hạn của hàm số logarit 109
Bài toán 6: Xét tính liên tục của hàm số logarit tại điểm x_0 110

CHƯƠNG V

PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ MŨ

Chủ đề 1: *Phương trình mũ* 111
Bài toán 1: Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương 111
Bài toán 2: Phương pháp logarit hoá và đưa về cùng cơ số 115
Bài toán 3: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 1 117
Bài toán 4: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 2 124
Bài toán 5: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 3 126
Bài toán 6: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 4 128
Bài toán 7: Sử dụng tính chất liên tục của hàm số 129
Bài toán 8: Sử dụng tính chất đơn điệu của hàm số 130
Bài toán 9: Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ 135
Bài toán 10: Sử dụng phương pháp đánh giá 136

Chủ đề 2: *Bất phương trình mũ* 140
Bài toán 1: Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương 140
Bài toán 2: Phương pháp logarit hoá và đưa về cùng cơ số 143
Bài toán 3: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 1 146
Bài toán 4: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 2 150
Bài toán 5: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 3 151
Bài toán 6: Sử dụng tính chất đơn điệu của hàm số 153
Bài toán 7: Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ 155
Bài toán 8: Sử dụng phương pháp đánh giá 156

Chủ đề 3: *Hệ phương trình mũ* 158
Bài toán 1: Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương 158
Bài toán 2: Phương pháp đặt ẩn phụ 161
Bài toán 3: Sử dụng phương pháp hàm số 164
Bài toán 4: Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ 167
Bài toán 5: Sử dụng phương pháp đánh giá 168

CHƯƠNG VI

PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ LOGARIT

Chủ đề 1: *Phương trình logarit* 170
Bài toán 1: Phương pháp logarit hoá và đưa về cùng cơ số 170
Bài toán 2: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 1 181
Bài toán 3: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 2 186
Bài toán 4: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 3 188
Bài toán 5: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 4 189
Bài toán 6: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 5 191
Bài toán 7: Sử dụng tính chất liên tục của hàm số 194
Bài toán 8: Sử dụng tính chất đơn điệu của hàm số 195
Bài toán 9: Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ 200
Bài toán 10: Sử dụng phương pháp đánh giá 202

Chủ đề 2: *Bất phương trình logarit* 204
Bài toán 1: Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương 204
Bài toán 2: Sử dụng các phép biến đổi logarit 208
Bài toán 3: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 1 210
Bài toán 4: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 2 213
Bài toán 5: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 3 215
Bài toán 6: Phương pháp đặt ẩn phụ – Dạng 4 216
Bài toán 7: Sử dụng tính chất đơn điệu của hàm số 219
Bài toán 8: Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ 221
Bài toán 9: Sử dụng phương pháp đánh giá 223

Chủ đề 3: *Hệ phương trình logarit* 225
Bài toán 1: Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương 225
Bài toán 2: Phương pháp đặt ẩn phụ 228
Bài toán 3: Sử dụng phương pháp hàm số 230
Bài toán 4: Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ 231
Bài toán 5: Sử dụng phương pháp đánh giá 233

SÁCH THAM KHẢO 235

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập: PHẠM THÀNH HƯNG

Biên tập: NGUYỄN TRỌNG HẢI
Trình bày bìa: VÕ THỊ THỪA

HỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11

Mã số: 1L – 36ĐH2005
In 2000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Xưởng in Chi nhánh Công ty Phát triển Công nghệ và Truyền hình – TP. Hồ Chí Minh.
Số xuất bản: 25-2005/CXB/15-208/XB/NXB ĐHQG HN, ngày 6/10/2005.
Quyết định xuất bản số: 12/LK/QĐ-NXB ĐHQGHN.
In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2005.